This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

TRANSPORTATION LIBRARY
TS
2027
.D9A
A 794,211

MÉMOIRE

SUR LE

TIRAGE DES VOITURES

ET SUR LE

FROTTEMENT DE ROULEMENT.

PAR J. DUPUIT,

Ingénieur en chef des ponts et chaussées.

(Extrait des Annales des ponts et chaussées.)

TRANSPORTATION LIBRARY

PARIS.

CARILIAN-GOEURY ET Vᵒᴵᴿ DALMONT,

LIBRAIRES DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

QUAI DES AUGUSTINS, Nᵒˢ 39 ET 41.

1842.

PROPERTY OF
University of Michigan Libraries
1817
ARTES SCIENTIA VERITAS

233

Transportati
Library
TS
202
.D9

MÉMOIRE

SUR

LE TIRAGE DES VOITURES

ET SUR

LE FROTTEMENT DE ROULEMENT.

PARIS.—IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
IMPRIMEURS DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE,
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.

MÉMOIRE

SUR LE

TIRAGE DES VOITURES

ET SUR LE

FROTTEMENT DE ROULEMENT.

PAR J. DUPUIT,

Ingénieur en chef des ponts et chaussées.

(Extrait des Annales des ponts et chaussées.)

TRANSPORTATION LIB-

PARIS.

CARILIAN-GŒURY ET Vor DALMONT,

LIBRAIRES DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

QUAI DES AUGUSTINS, Nos 39 ET 41.

1842.

MÉMOIRE

SUR

LE TIRAGE DES VOITURES

ET SUR

LE FROTTEMENT DE ROULEMENT.

J'ai publié en 1837 un Essai sur le tirage des voitures et sur le frottement de seconde espèce. Le secrétaire de la commission des Annales a bien voulu rendre compte de cet ouvrage, avec une bienveillance dont je regrette de ne pouvoir plus le remercier publiquement aujourd'hui. Depuis cette époque, M. Morin a présenté à l'Académie des sciences des expériences sur le même sujet. Le travail de cet expérimentateur a été l'objet d'un rapport favorable, dans lequel il a été fait mention de mes recherches antérieures en ces termes :

« Un jeune ingénieur français, M. Dupuit, a publié en 1837 un travail étendu sur la même question. Il est le premier qui ait mis en évidence par une série d'expériences, l'influence du diamètre des roues sur le tirage; mais comme il n'a pu employer que les dynamomètres ordinaires, la loi qu'il donne et qui rendrait ce tirage en raison inverse de la racine quarrée du diamètre des roues, ne nous paraît pas devoir être préférée à celle qui résulte des expériences de M. Morin, c'est-à-dire à la simple raison inverse du diamètre, loi que Coulomb avait déja donnée pour le roulement des cylindres de bois. »

En rapprochant les résultats de M. Morin de ceux que j'ai publiés, on reconnaît qu'ils ne diffèrent pas seulement sur cette question des diamètres, mais sur toutes les circonstances qui font varier le tirage, telles que la largeur de la bande, la vitesse, la suspension et enfin par

le chiffre même de l'intensité de cette résistance sur les diverses natures de chaussées.

Lors de mes premières expériences, quand j'apportais dans l'appréciation des résultats, l'impartialité toute naturelle à celui qui aborde une question pour la première fois, ce fut avec regret que je les vis en contradiction avec ceux de Coulomb; craignant de m'être trompé, je multipliai les expériences, j'en fis varier les circonstances autant qu'il me fut possible, et ne cédai qu'à l'évidence des faits; car ce serait une erreur de croire, qu'il y a besoin d'instruments bien précis pour juger la question principale qui nous divise M. Morin et moi. On peut en effet la ramener à ces termes: le tirage d'une voiture ayant des roues de 2 mètres de rayon étant de 100 kilogrammes, lorsqu'on lui substituera des roues de $0^{m}.50$, ce tirage deviendra-t-il de 400 kilogrammes, comme le veut la loi de Coulomb, confirmée par M. Morin, ou de 200 kilogrammes seulement, suivant la loi que j'ai donnée. Or, je le demande, lorsqu'il ne s'agit que de distinguer 200 kilogrammes de 400 kilogrammes, le dynamomètre ordinaire dont je me suis servi n'est-il pas bien suffisant? et en choisissant des diamètres qui varient dans un plus grand rapport, on peut obtenir des différences encore plus tranchées, et c'est précisément ce que j'ai fait. Ce n'est donc que lorsque je fus certain de l'exactitude de mes résultats, que je me suis mis en contradiction avec Coulomb. Les expériences de M. Morin et l'assentiment que leur a donné l'Académie ne m'ont prouvé qu'une chose: la nécessité de compléter mon premier travail, puisque, après l'avoir lu, on pouvait encore conserver des doutes.

Sur ma demande, l'administration a bien voulu me placer dans une position qui me permît de me livrer tout entier aux expériences et aux recherches que je croirais devoir faire; elle a mis à ma disposition les sommes que j'ai demandées, pendant que des moyens analogues étaient fournis à M. Morin. Enfin la commission du roulage fut

invitée à contrôler et vérifier les résultats qui lui seraient soumis. J'ai cru devoir rappeler ces circonstances, parce qu'elles me fournissent l'occasion de faire connaître la protection éclairée que M. le sous-secrétaire d'état des travaux publics a bien voulu accorder à ces recherches, et qu'elles sont une preuve de l'importance des questions qu'elles avaient pour but de résoudre.

Ce travail d'expériences et de recherches a duré près d'un an ; je l'ai résumé dans un mémoire que j'ai adressé à l'administration et à l'Académie des sciences. J'en extrais aujourd'hui la partie relative au tirage des voitures et au frottement de roulement.

Mon travail eût été incomplet si je n'y avais ajouté un examen de celui de M. Morin ; me trouvant en contradiction non-seulement avec lui, mais avec Coulomb, mais avec le savant rédacteur du rapport fait à l'Académie des sciences sur toutes ces questions, il ne m'était permis de négliger aucun des moyens qui étaient à ma disposition pour combattre des autorités si imposantes.

PREMIÈRE PARTIE. — EXPÉRIENCES.

Avant de parler de mes nouvelles expériences, qu'on me permette de jeter un coup d'œil rapide sur celles que j'ai publiées en 1837, et envers lesquelles l'Académie a été peut-être un peu trop sévère en disant : qu'*on n'avait jusqu'à présent, sur ce sujet, que des observations faites sans grande précision, et présentées sans conséquences bien établies.*

Après une étude de toutes les circonstances qui peuvent rendre les oscillations du dynamomètre plus régulières, et par conséquent leur observation plus facile, j'ai cherché d'abord l'influence de la pression sur le tirage. Des voitures à deux roues, chargées de poids de plus en plus considérables, m'ont donné les tirages correspondant à chaque pression. En représentant graphiquement tous les résultats, j'ai eu des points qui, pour chaque voiture,

sont venus se placer tout près d'une ligne droite, tantôt au-dessus, tantôt au-dessous. En rassemblant ainsi quatre-vingt-deux expériences, j'ai fait voir que pour cinq seulement l'erreur est de $\frac{1}{10}$, et que pour les soixante dix-sept autres elle est au-dessous de $\frac{1}{20}$. Le principe de la proportionnalité du tirage à la pression se trouve donc établi d'une manière incontestable, et comme sur ce seul point je me trouve d'accord avec mes contradicteurs, je ne m'y arrêterai pas davantage.

Je dois cependant faire observer, parce que c'est une remarque qui porte sur tout l'ensemble de mon travail, qu'une fois cette propriété démontrée, on peut donner à l'observation du simple dynamomètre un degré d'exactitude pour ainsi dire indéfini. Si pour déterminer le tirage d'une voiture, on ne se contente plus de chercher le tirage correspondant à une certaine pression, mais une série de tirages correspondant à une série de pressions, on obtient ainsi des chiffres dont la moyenne s'approche d'autant plus de la vérité qu'ils sont plus nombreux, et obtenus dans des limites plus étendues. Or, c'est précisément ainsi que j'ai opéré. Lorsque je dis que le tirage de telle bande, de tel diamètre, de telle vitesse, est de 0.03 par exemple, ce chiffre n'est pas le résultat d'une expérience isolée, c'est la moyenne de dix ou douze expériences, dans lesquelles on a fait varier la pression entre des limites très-étendues en fournissant aux erreurs le plus de chances possible pour se compenser. Ce chiffre a donc un grand degré d'exactitude, et on peut en avoir une mesure en le comparant avec les chiffres élémentaires dont il est déduit. Au reste le meilleur procédé d'expérimentation est sans contredit celui qui a donné les résultats les plus exacts; ce sont eux que nous allons justifier maintenant.

En expérimentant le tirage de voitures montées sur des roues de diamètres différents, j'ai trouvé des chiffres dont la comparaison m'a conduit à conclure que le tirage était en raison inverse de la racine quarrée.

Soient : θ, θ', ,..... des chiffres de tirage correspondant aux diamètres D, D', D'', on aura, si la loi est exacte :

$$\theta : \theta' :: \sqrt{D'} : \sqrt{D}$$

$$\theta : \theta'' :: \sqrt{D''} : \sqrt{D}$$

d'où

$$\theta\sqrt{D} = \theta' \sqrt{D'} = \theta'' \sqrt{D''} \ldots\ldots = \rho$$

tirage pour 1 m.oo de diamètre.

Dans le cas où le tirage serait suivant la simple raison inverse, on aurait

$$\theta D = \theta' D' = \theta'' D'' = \ldots\ldots = \rho$$

tirage pour 1 m.oo de diamètre.

Or, voici une série d'expériences citée dans notre Essai.

DIAMÈTRES D	RAPPORT du tirage à la pression θ	MÊME RAPPORT pour 1 m.oo de diamètre.	
		Loi de la $\sqrt{}$ $\theta\sqrt{D}$	Loi de la 1re puissance θD
mèt.			
0.76	0.0390	0.0340	0.0296
0.91	0.0373	0 0356	0.0339
1.35	0.0293	0.0340	0.0396
1.82	0.0276	0.0372	0.0502
1.88	0.0256	0.0356	0.0481

On voit que dans l'hypothèse de la loi de la racine quarrée tous les nombres qui doivent être égaux sont compris entre 34 et 37; tour à tour plus forts et plus faibles que la moyenne; dans l'hypothèse de la loi inverse du diamètre, ils sont compris entre 30 et 50 allant de l'un à l'autre d'une manière régulière.

Notre Essai contient six autres séries d'expériences faites tant sur les empierrements que sur le pavé; elles présentent les mêmes résultats. Nous nous bornerons à y renvoyer; nous ne pourrions que répéter sur chacune d'elles ce que nous venons de dire ici. Les diamètres parcourant une échelle

variée et étendue, nous n'avons donc pas hésité, malgré l'autorité de Coulomb, à admettre que la résistance au roulement était en raison inverse de la racine quarrée des diamètres. Ce célèbre physicien n'avait opéré que sur des cylindres de bois roulant sur des traverses de bois; il nous parut intéressant d'essayer si la différence que nous trouvions tenait à la grandeur des diamètres ou à la nature des surfaces. Nous répétâmes donc nos expériences sur de petits diamètres variant de 6 millimètres à 6 centimètres; mais au lieu de les tirer avec un dynamomètre comme nous avions fait pour les roues, au lieu de leur imprimer un mouvement à l'aide de poids comme avait fait Coulomb, nous les laissâmes rouler le long d'un plan incliné d'une hauteur déterminée et achever leur course sur un plan horizontal. En appelant Θ la résistance éprouvée, s l'espace parcouru, on a évidemment :

$$Ph = \Theta P s \quad \text{d'où} \quad \Theta = \frac{h}{s}$$

En multipliant les chiffres de tirage trouvés par les racines quarrées des diamètres ou par les diamètres eux-mêmes, on a de même un moyen de vérification pour les deux lois :

NATURE des surfaces.	DIAMÈTRES D	ESPACES s	RÉSISTANCE ÉPROUVÉE pour le diamètre de 1m.00. Loi de la $\frac{h}{s}\sqrt{D}$	Loi de la 1re puissance $\frac{h}{s}D$
		mèt.		
Cylindres de bois sur chemin de bois.	0.0060	2.22	0.0173	0.0014
	0.0075	3.50	0.0172	0.0015
	0.0125	3.72	0.0152	0.0017
	0.0162	3.83	0 0166	0.0021
	0.0225	5.05	0.0148	0.0022
	0.0312	6.10	0.0143	0.0025
	0.0435	6.49	0.0163	0.0034
	0.0625	8.43	0.0148	0.0037

NATURE des surfaces.	DIAMÈTRES D	ESPACES s	RÉSISTANCE ÉPROUVÉE pour le diamètre de 1m.00. Loi de la $\frac{h}{s}\sqrt{D}$	Loi de la 1re puissance $\frac{h}{s}D$
		mèt.		
Cylindres de fer sur chemin de bois.	0.0075	3.20	0.0134	0.0012
	0.0105	3.72	0.0127	0.0014
	0.0170	4.42	0.0147	0.0019
	0.0260	5.20	0.0152	0.0024
	0.0340	6.37	0.0145	0.0027
	0.0470	7.65	0.0140	0.0030
	0.0600	8.36	0.0147	0.0036

Les chiffres des deux dernières colonnes donnent, comme on le voit, des résultats semblables à ceux que nous trouvions tout à l'heure avec le dynamomètre; mais comme ici les diamètres varient dans un rapport décuple, ces résultats sont devenus plus saillants. Le produit $\Theta\sqrt{D}$ n'éprouve que de légères variations. Ces variations sont alternatives; elles ne sont pas les mêmes dans les deux séries, ce qui prouve qu'elles ne tiennent pas au diamètre; le produit ΘD, au contraire, bien loin d'être constant, suit la variation des diamètres d'une manière régulière.

Dans la 1re série, on a successivement 14, 15, 17, 21, 22, 25, 34, 37.
Dans la 2e. . . . . 12, 14, 19, 24, 27, 30, 36.

Et cela doit être ainsi, car ces chiffres ne sont que le produit de la quantité constante :

$$\Theta\sqrt{D} = \rho \text{ , par } \sqrt{D} = \rho\sqrt{D}$$

ils doivent donc croître eux-mêmes dans le rapport des racines quarrées des diamètres. En présence de pareils résultats, il ne m'était pas permis d'admettre la loi de Coulomb, et en examinant les détails de son expérience, il ne m'a pas été difficile de trouver les causes de son er-

reur, que je crois avoir suffisamment expliquées dans mon Essai. Les expériences que je viens de résumer prouvent non-seulement que le frottement de roulement est en raison inverse des diamètres; mais, faites avec des cylindres de divers poids, de diverses longueurs sur des plans de diverses hauteurs, elles démontrent les quatre lois à l'aide desquelles on peut évaluer cette résistance dans tous les cas possibles.

Le frottement de roulement est : proportionnel à la pression ; indépendant de la largeur du contact; indépendant de la vitesse ; en raison inverse de la racine quarrée du rayon.

Je croyais, par mes nombreuses expériences, avoir placé ces principes hors de discussion. Aussi ai-je été étonné de voir l'Académie citer encore les expériences de Coulomb à l'appui de celles de M. Morin, et donner la préférence aux résultats de ce dernier expérimentateur sur ceux que j'avais donnés antérieurement.

On m'objectait que je m'étais servi d'un simple dynamomètre, et on ne faisait pas attention à la manière dont je l'avais employé. On passait sous silence les expériences que j'avais faites sur les petits diamètres qui les confirmaient sous tous les rapports ; on n'a voulu voir que les dynamomètres perfectionnés de M. Morin.

Pour ne laisser aucune objection possible à mes adversaires, grâce aux moyens qui ont été mis à ma disposition, j'ai fait depuis le rapport de l'Académie, des expériences en grand dans le genre de celles que j'avais faites en petit ; Pl. 24, *fig.* 1, j'ai fixé plusieurs paires de roues à leurs essieux et je les ai laissées rouler, du haut d'un plan inincliné, sur divers terrains, des empierrements, de la terre, etc., etc. Voici les résultats qu'elles m'ont donnés :

	DIAMÈTRE D	CHUTES h	ESPACES PARCOURUS s	RÉSISTANCE pour 1m.00 de diamètre. Loi de la $\frac{h}{s}\sqrt{D}$	RÉSISTANCE pour 1m.00 de diamètre. Loi de la 1re puissance $\frac{h}{s}D$	OBSERVATIONS.
	mèt.	mèt.	mèt.			
Route en empierrement, quelques pointes de cailloux, légères flaches après une pluie séchée par le vent. (n° 157 de Blois à Laval.)	0.35	1.06	23.00	0.0273	0.0161	
	0.88	1.08	33.00	0.0307	0.0287	
	1.15	1.11	44.00	0.0270	0.0290	
	1.39	1.11	46.00	0.0284	0 0335	
	1.55	1.11	50.00	0.0276	0.0344	
			Moyne	0.0282		
Route en empierrement, parfaite, aussi unie et roulante que possible. (n° 23 de Paris à Nantes.)	0.35	1.13	31.00	0.0214	0 0127	
	0 88	1.25	52.00	0.0208	0.0194	
	1.15	1.26	67.00	0.0201	0.0216	
	1.55	1.28	74.00	0.0215	0.0268	
	1.82	1.32	84.00	0.0211	0.0285	
			Moyne	0.0210		
Terrain battu de l'atelier central des ponts à bascule, un peu poussiéreux, 29 août 1839, (devant la commission du roulage).	0.20	1.00	16.50	0.0274	0.0121	
	0.40	1.00	23.90	0.0264	0.0166	
	0.60	1.00	26.15	0.0282	0 0230	
	0.80	1.00	28.45	0.0313	0.0281	(a)
	1.40	1.00	32.65	0.0310	0.0306	
	1.60	1.00	36.00	0.0328	0.0390	
			Moyne	0.0295		
			(b)	(b)		Poids
Même terrain un peu humide, 3 octobre (devant la commission du roulage).	0.10	1 00	8.00	0.0400	0.0128	46.5
	0.20	1.00	15.20	0.0293	0.0132	46 5
	0.40	1.00	22.30	0.0285	0.0175	46.5
	0.60	1.00	26.60	0.0290	0.0225	9 0
	0 80	1.00	33.20	0.0270	0.0232	46.5
	1.40	1.00	36.70	0.0321	0.0382	33.0
	1.60	1.00	40.50	0.0312	0.0397	46.0
			Moyne	0.0362		

(a) Toutes ces roues ont exactement la même largeur de bandes.

(b) Ces roues mal tournées sautaient sur le sol ; les 7m.00 à 8m.00 près du plan étaient plus humides par suite de la pluie de la veille, ce qui fait que les petites roues trouvaient un terrain moyennement plus tirant que les grandes.

Ces expériences répétées un grand nombre de fois ont toujours donné les mêmes résultats, c'est-à-dire des chiffres variant dans le même rapport. Je crois inutile de les citer. Ceux-ci nous paraissent suffire pour démontrer 1° que la loi inverse de la racine quarrée est rigoureusement exacte. Sans doute les coefficients relatifs à cette dernière loi ne sont pas rigoureusement égaux, cela tient à ce que chaque diamètre ne parcourt pas exactement le même terrain, aux imperfections des roues qui ne sont, ni rigoureusement cylindriques, ni rigoureusement perpendiculaires aux essieux ; enfin à la résistance de l'air qui se fait plus sentir sur les grandes roues que sur les petites, surtout lorsqu'elles sont légères. Ainsi dans cette expérience où il nous avait été imposé d'avoir plusieurs roues d'un même poids, depuis $0^{m}.10$ jusqu'à $1^{m}.60$, on conçoit que ces dernières devaient éprouver une résistance beaucoup plus considérable, c'est ce qui explique pourquoi les derniers coefficients sont un peu plus forts que les autres. Quant à ceux de la loi de Coulomb et de M. Morin, on voit cette progression ascendante que nous avons signalée plus haut se manifester dans toutes les expériences sans aucune anomalie. On passe d'une manière régulière du simple au triple, quand le diamètre passe lui-même du simple au décuple. Nous avons expliqué, en effet, tout à l'heure, qu'il résultait de la loi de la racine quarrée que la divergence de ces chiffres devait elle-même être soumise à cette loi.

Nous ne concevrions pas qu'on pût hésiter en présence des chiffres que nous venons de présenter ; les conséquences que nous en avons déduites en dérivent d'une manière trop immédiate ; on ne pourrait tout au plus faire d'objections que contre le système même d'expérimentation. C'est dans ce but que nous croyons devoir prévenir quelques-unes de celles qui pourraient être faites.

Les roues en tombant du plan incliné ont une vitesse

qui dépend de la hauteur de la chute et de leur moment d'inertie; cette vitesse diminue peu à peu avec la distance, et bientôt les roues s'arrêtent. Voilà donc des espaces inégaux parcourus avec des vitesses variables. Si donc la résistance du terrain est une fonction de la vitessse, on peut craindre au premier abord que la longueur de ces espaces ne soit altérée de manière à empêcher la loi exacte des diamètres, qui a lieu dans le mouvement uniforme, de se manifester dans ce mouvement varié. Mais il est facile de prouver par le calcul que, quelle que soit l'influence de la vitesse sur la résistance du terrain, les espaces parcourus par divers diamètres sont toujours entre eux dans le même rapport.

Supposons, en effet, la résistance représentée par une fonction de la vitesse :

$$\frac{a+bV+cV^2+dV^3\ldots..}{f(R)}$$

Les coefficients a, b, c, d...., ne variant que d'un terrain à un autre (M. Morin suppose, page 56 de son mémoire, que cette fonction se réduit $\left[\frac{a+bV}{R}\right]$), $f(R)$ étant la relation cherchée entre le rayon et le tirage.

Soient : K' le moment d'inertie de la roue pris par rapport au point de contact (pour un cylindre $K'=\frac{3}{2}M$).

V_0 la vitesse du centre de la roue au bas du plan incliné;

P le poids de la roue;

h la hauteur du plan incliné.

L'équation du mouvement de la roue sur le plan horizontal sera :

$$K'VdV=-\frac{(a+bV+cV^2\ldots..)}{f(R)}Pds$$

ou

$$\frac{VdV}{a+bV+cV^2+\ldots..}=-\frac{P}{K'}\frac{1}{f(R)}ds$$

Pour avoir l'espace parcouru S jusqu'au moment où la roue s'arrête, il suffit d'intégrer depuis $V=V_o$ jusqu'à $V=o$ il vient ainsi :

$$\int_{V_o}^{o} \frac{V\,dV}{a+bV+cV^2\ldots} = -\frac{P}{K'}\,\frac{S}{f(R)}$$

L'intégration du premier membre donnera nécessairement une F $(a, b, c, d\ldots\ldots V_o)$, c'est-à-dire une constante pour un même terrain et une même chute ; la vitesse V_o est en effet donnée par l'équation :

$$K'V_o^2 = 2Ph$$

$$V_o = \sqrt{\frac{2P}{K'}h}$$

Or, $\frac{P}{K'}$ est une fraction constante pour des corps semblables. Ainsi on arrivera nécessairement, en faisant passer toutes les constantes dans le second membre, à :

$$\frac{S}{f(R)} = A$$

et par conséquent :

$$S = Af(R)$$

A ne variant qu'avec le terrain et la vitesse V_o. Donc, si la résistance du terrain dépendait d'une manière quelconque de la vitesse, cette influence n'aurait d'autre résultat que d'abréger tous les espaces dans un même rapport, et n'empêcherait pas, par conséquent, de reconnaître si ces espaces croissent dans le rapport soit des diamètres soit des racines quarrées.

Les expériences sur les plans inclinés non-seulement sont indépendantes de l'influence que la vitesse pourrait avoir sur la résistance du terrain, mais elles peuvent servir à démontrer que cette influence n'existe pas. En effet, comme nous venons de le voir, la constante A dépend de

la vitesse V_0 qui a lieu au bas du plan. Par exemple, dans la relation donnée par M. Morin $\left(\frac{a+bV}{\frac{2}{3}f(R)}\right)$ on aurait :

$$S = f(R)\frac{2h}{a}\left(\frac{1}{2} - \frac{b}{3a}V_0 + \frac{b^2}{4a^2}V_0^2 \ldots\ldots\right)$$

Si donc, en faisant varier la hauteur h du plan, on trouve des espaces proportionnels à cette quantité, on en conclura que b est nul. Car, sans cela, les termes qui contiennent $V_0 = \sqrt{\frac{2P}{K'}}\,h$ troubleraient nécessairement cette proportion. Or, si on remonte à la description que nous avons donnée dans notre Essai des expériences sur les petits cylindres, on verra que par la manière dont elles étaient faites, nous employions des plans de toute hauteur, ce qui ne troublait nullement le rapport qui existait entre les espaces. Enfin nous avons fait une expérience sur les grands diamètres avec deux hauteurs de chute différentes, et voici les résultats observés.

Atelier central des ponts à bascule, 3 octobre, devant la commission du roulage.

POIDS.	DIAMÈTRES.	ESPACES PARCOURUS.	
		Chute, 1m.00	0m.50
kilog.	mèt.	mèt.	mèt.
46.50	0.10	8.00 (*a*)	4.20 (*b*)
46.50	0.20	15.20	6.50 (*b*)
46.50	0.40	22.30	10.85
9.00	0.60	26.60	15.50
44.50	0.80	33.20	17.00
33.00	1.40	36.70	23.90
46.50	1.60	40.50	27.00
Sommes.		182.50	104.95

(*a*) Les chiffres de chute 1m.00 sont ceux cités plus haut, page 13.
(*b*) Nous avons déjà dit que sur 7 à 8m.00 à partir du pied du plan incliné le frottement était accru par suite de la pluie de la veille.

En examinant les chiffres de ce tableau on reconnaît que les espaces parcourus par les petits diamètres se trou-

vent assez bien en proportion des hauteurs de chute; ceux parcourus par les grands dépassent un peu dans la chute $0^m.50$ la moitié de l'espace relatif à la chute $1^m.00$. En consultant la colonne des poids, on se rendra compte de cette légère anomalie. Nous avons déjà fait observer précédemment que, dans la chute $1^m.00$, les grands diamètres pour lesquels on nous avait astreint à avoir le même poids que pour les petits, étaient restés un peu en arrière à cause de la résistance de l'air. Dans la chute $0^m.50$, cette résistance se trouvant diminuée de moitié à peu près, les grands diamètres doivent naturellement aller au delà de la moitié de l'espace parcouru précédemment. En résumé, on voit qu'au lieu de trouver $91^m.25$ pour la somme des espaces relatifs à la chute $0^m.50$, on trouve 104.95. Ces nombres se trouvant renfermés dans les limites des erreurs possibles de ce genre d'expérimentation, on peut en conclure que la résistance au roulement est indépendante de la vitesse.

On a objecté au système d'expérimentation au moyen de plans inclinés que les cylindres abandonnés à eux-mêmes déviaient de la ligne droite; qu'il y avait des chocs, des glissements, etc., etc., qui rendaient le système complétement défectueux. Nous pourrions dire d'abord que lorsqu'on tire une voiture ordinaire au moyen d'un dynamomètre, les roues n'étant pas guidées, il s'en faut que leur tracé soit une ligne droite; que dans les expériences de Coulomb que M. Morin a depuis répétées, les cylindres sont aussi abandonnés à eux-mêmes et doivent dévier s'ils ne sont pas parfaitement cylindriques. Mais il nous semble que cette objection n'est pas sérieuse et que les résultats mêmes des expériences la réfutent complétement.

Ainsi, vous avez des cylindres qui devraient parcourir, suivant la loi de M. Morin, des longueurs de $10^m.00$, $20^m.00$, $40^m.00$, $60^m.00$, $80^m.00$, $140^m.00$, $160^m.00$, et qui, parce qu'il y a des chocs, des glisse-

ments, des déviations, vont parcourir, non pas des espaces irréguliers, mais inversement proportionnels aux racines quarrées de ces quantités. Vous opérez en grand, avec des roues de voitures, telles qu'on les trouve dans le commerce, et par conséquent assez inégales, comme dans les deux premières expériences citées plus haut; vous opérez avec des appareils spéciaux et par conséquent précis, comme dans les deux dernières expériences de l'atelier central des ponts à bascule; vous faites ensuite des expériences en petit avec des cylindres de bois et de fer, et vous avez toujours le même résultat. Jamais la roue qui doit parcourir 160^{m}.00, suivant la loi de M. Morin, n'en parcourra 170 ou 150 ou 120 ou même 80^{m}.00; vous la verrez toujours s'arrêter près des 40^{m}.00 que lui assigne la loi de la racine quarrée. Il n'y a donc pas le moindre glissement dans ces expériences. Les déviations en sont elles-mêmes une preuve. Lorsque les deux roues fixées sur le même essieu n'ont pas rigoureusement le même diamètre, elles décrivent un arc de cercle tel que chacune d'elles parcourt un espace proportionnel à son diamètre. Il y aurait glissement au contraire si on les obligeait à aller en ligne droite. Le système d'expérimentation au moyen des plans inclinés nous paraît donc à l'abri de toute critique. C'est celui que nous préférons, surtout lorsqu'il y a controverse, parce que le résultat fixe et précis se présente immédiatement à l'observateur sans avoir besoin d'être dégagé des causes étrangères qui peuvent en altérer l'exactitude; il n'y a rien ici, ni frottement à l'essieu à retrancher, ni pression à évaluer. Tout se déduit d'une longueur qui peut être constatée d'une manière authentique et sur laquelle il est impossible de commettre la moindre erreur. Cependant nous n'avons voulu négliger aucun moyen de connaître la vérité, et, sur l'invitation de la commission du roulage, nous avons expérimenté avec les dynamomètres de M. Morin.

Nous avons placé les dynamomètres que l'administration de l'École polytechnique a bien voulu nous confier, à l'arrière d'une voiture spéciale sur laquelle s'opérait directement la traction. La voiture à expérimenter était attachée à celle-ci, au moyen de l'anneau du dynamomètre; de sorte que cet instrument n'éprouvait que le tirage de cette dernière voiture. Cette disposition présente plusieurs avantages importants : elle permet d'expérimenter toute espèce de voitures sans monter et démonter le dynamomètre, ce qui est essentiel pour les routes où les circonstances atmosphériques font varier le tirage d'une manière assez sensible pour que des expériences faites à de trop grands intervalles de temps ne soient plus comparables; elle permet de prendre, pour la transmission du mouvement des roues aux dynamomètres, toutes les précautions nécessaires pour qu'elle soit continue et régulière; enfin, elle rend le calcul du tirage plus facile et moins sujet à erreur, parce que c'est le même coefficient qui sert dans toutes les expériences. C'est, au reste, une disposition analogue à celle adoptée, dans des expériences sur le tirage des chemins de fer, par M. Clapeyron, qui a été le premier à réaliser l'idée ingénieuse de M. Poncelet, d'après laquelle sont construits ces instruments.

Les expériences que nous allons rapporter ont été faites avec le dynamomètre à compteur que nous préférons, parce que ses indications ne laissent rien à l'arbitraire des évaluations de l'observateur; le dynamomètre à style exige, pour l'évaluation du tirage, une opération très-longue et sujette à erreur. D'après le rapport qui existait entre les dimensions des diverses parties au moyen desquelles s'opérait la transmission de mouvement, le coefficient par lequel le nombre de tours de roulette devait être multiplié, pour expérimenter le tirage, était $\frac{85.62}{e}$ (e espace parcouru). Nous avons vérifié ce résultat en fai-

sant marcher le dynamomètre avec un écartement artificiel du ressort, et nous avons trouvé ce chiffre parfaitement exact.

Nous nous sommes servi, dans nos expériences, d'un corps de voitures à quatre roues, auquel nous avons adapté successivement des roues de trois diamètres différents : $0^m.34$, $0^m.92$, $1^m.96$; le rapport du plus grand au plus petit diamètre était assez considérable pour que l'influence de cette dimension de la roue se manifestât d'une manière tranchée et décisive.

Pour chaque diamètre nous avons parcouru exactement le même terrain, $50^m.00$ en allant, $50^m.00$ en revenant, sur une partie de route horizontale ; ce qui nous permettait de vérifier l'exactitude de l'expérience par l'égalité du nombre de tours de roulette à l'aller et au retour.

Chaque diamètre est expérimenté sous deux pressions différentes, ce qui fournit encore un moyen d'apprécier l'exactitude de l'expérience par la comparaison des coefficients du tirage qui doivent être les mêmes pour chaque diamètre.

Voici maintenant les données nécessaires au calcul des expériences :

Poids du chariot sans roues.	305 kilog.
Poids des quatre roues de $1^m.96$.	374
de $0^m.92$.	166
de $0^m.34$.	74
Diamètre moyen du moyeu.	$0^m.06$
Coefficient du frottement à l'essieu évalué. .	$0^m.012$

Voir le tableau pages 22 et 23.

SOL.	Diamètres D	Pression P	Tours du compteur N	Tirage T = 0.856N	Frottement à l'essieu $0.12\frac{d}{D}(P-p)$	Résistance au roulement F	Rapport à la pression $\frac{F}{P}$	Tirage rapporté au diamètre 1. Loi de la $\frac{F}{P}\sqrt{D}$	Tirage rapporté au diamètre 1. Loi de la $\frac{F}{P}D^{p}$	OBSERVATIONS.
1re *expérience.*	mèt.	kilog.		kilog.	kilog.					
Chaussée d'empierrement du Cours-la-Reine, extrémité du côté des Invalides.	0.34	545	71	60.78	9.99	50.79	0.093			
		1000	132	112.99	19.63	93.36	0.093			
					Moyenne. . .		0.093	0.054	0.032	
	0.92	545	34	29.10	2.96	26.14	0.048			
		1000	64	54.78	6.51	48.27	0.048			
Très-humide, emplois récents de cailloux.					Moyenne. . .		0.048	0.046	0.044	
(19 novembre 1839.)		679	27	23.11	1.13	21.98	0.032			
	1.96	1000	44	37.66	2.32	35.34	0.035			
					Moyenne. . .		0.034	0.048	0.067	

	0.34	545 1000	59 95	50.50 81.32	9.99 19.63	40.51 61.69	0 074 0.062		
					Moyenne. . .		0.068	0.039	0.023
2e *expérience.*									
Chaussée d'empierrement du Cours-la-Reine, au milieu.	0.92	545 1000	23 50	19.68 42.80	2.96 6.51	16.72 36.29	0.031 0.036		
Un peu humide.					Moyenne. . .		0.034	0.033	0.031
(27 novembre 1839.)	1.96	679 1000	23 33	19.68 28.24	1.13 2.32	18.55 25.92	0.027 0.026		
					Moyenne. . .		0.0265	0.037	0.052
	0.34	545 1000	78 134	66.77 114.70	9.99 19.63	56.78 95.07	0.104 0.095		
					Moyenne. . .		0.099	0.057	0.034
3e *expérience.*									
Même emplacement.									
Léger dégel qui désagrége la chaussée.	0.92	545 1000	38 70	32.53 59.92	2.96 6.51	29.57 53.41	0.055 0.053		
(28 novembre 1839.)					Moyenne. . .		0.054	0.052	0.050
Devant le secrétaire de la commission du roulage.	1.96	679 1000	29 42	24.82 35.99	1.13 2.32	23.69 33.67	0.035 0.034		
					Moyenne. . .		0.034	0.048	0.067

Pour reconnaître si le tirage est en raison inverse de la racine quarrée du diamètre, ou simplement en raison inverse du diamètre, il n'y a qu'à comparer les chiffres des deux dernières colonnes.

Dans l'hypothèse de la loi de la racine quarrée,

Les chiffres de la 1re expérience. . .	0.054	0.046	0.048
Ceux de la 2e expérience. . .	0.039	0.033	0.037
Ceux de la 3e expérience. . .	0.057	0.052	0.048

devraient être égaux entre eux. Or, on voit qu'à quelques légères différences près, cette égalité se trouve dans chacune des expériences.

Dans l'hypothèse de la loi de Coulomb confirmée par M. Morin, les chiffres correspondants qui doivent être égaux sont :

1re expérience. . .	0.032	0.044	0.067
2e expérience. . .	0.023	0.031	0.052
3e expérience. . .	0.034	0.050	0.067

c'est-à-dire que dans chaque expérience il y a une erreur de plus de cent pour cent, toujours dans le même sens du plus grand au plus petit diamètre.

Nous n'insisterons pas davantage sur ces résultats; nous ne pourrions rien dire de plus concluant que les chiffres que nous venons de rapprocher.

Si on objectait qu'en prenant 0.12 pour coefficient du frottement à l'essieu, nous avons fait une part trop large à cette résistance, nous n'aurions même pas besoin de remonter aux explications que nous avons données dans notre mémoire pour démontrer que ce coefficient est plutôt trop faible que trop fort. D'après la manière dont les données des expériences avaient été choisies, cette résistance y joue un rôle trop secondaire pour qu'elle puisse altérer les résultats d'une manière sensible. Ainsi, en calculant la troisième expérience qui est la plus inexacte, dans l'hypothèse du coefficient 0.05 pour frottement à l'essieu,

comme l'a fait M. Morin, on trouverait pour les chiffres qui doivent être égaux :

Loi de la racine quarrée.	0.064	0.055	0.050
Loi de Coulomb et de M. Morin.	0.037	0.052	0.070

Les premiers chiffres sont un peu moins exacts que tout à l'heure, il est vrai, et il en doit être ainsi, si, comme nous le pensons, le coefficient 0.05 est trop faible ; mais on reconnaît encore parfaitement l'influence du diamètre, tandis que les seconds restent tellement divergents qu'il est impossible d'en conclure autre chose sinon que l'hypothèse dont on est parti est complétement fausse.

Les instruments dynamométriques de M. Morin ne sont donc pas venus donner un démenti ni aux simples dynamomètres, ni aux plans inclinés ; il y a dans ces trois systèmes d'expériences, dont un grand nombre de résultats sont authentiques, un accord auquel il nous paraît difficile de refuser sa conviction. Cependant nous allons puiser des preuves nouvelles et au moins aussi concluantes dans des considérations analytiques qui vont lier entre elles toutes les propriétés du frottement de roulement et établir une théorie rigoureuse de cette résistance.

DEUXIÈME PARTIE. — THÉORIE DU FROTTEMENT DE ROULEMENT DIT DE SECONDE ESPÈCE.

Avant d'entrer dans l'examen de la nature et des causes du frottement de roulement, il est indispensable d'avoir une idée exacte et précise sur l'intensité et la position de cette force. Je ne considérerai ici que le cas particulier le plus simple, celui d'un cercle ou d'une roue roulant sur un plan avec une vitesse uniforme. Le cas général d'un corps quelconque roulant et glissant à la fois d'un mouvement varié s'en déduit facilement.

C'est un fait incontestable d'expérience qu'on peut faire rouler une roue d'un poids P, *fig.* 2, d'un mouvement uniforme sur un plan horizontal à l'aide d'une force T appli-

quée à son centre. Puisque le mouvement est uniforme, toutes les forces qui agissent sur le corps doivent se faire équilibre; il en résulte que dans l'étendue du contact, les molécules du plan et du corps réagissent, de manière à donner une résultante inclinée S égale et directement opposée à celle des forces T et P. Décomposons cette résultante en deux forces, l'une horizontale F, l'autre verticale, l'équilibre du centre de gravité nous donnera :

$$F = T$$

Quant à la force verticale, elle devra être évidemment égale à P; de plus, pour que le corps ne tourne pas, il faudra qu'on ait, en appelant δ la distance Mm de la résultante au rayon vertical R, et h la hauteur de M au-dessus de m, et prenant les moments par rapport au point M :

$$TR - Fh = P\delta$$

or, puisque T=F, on aura :

$$T = P\frac{\delta}{R-h} \cdot \delta = \frac{T}{P}(R-h)$$

Dans ces équations on peut négliger h, parce que c'est une quantité fort petite par rapport à R et même à δ. L'équation du cercle donne, en effet, $\delta^2 = 2Rh - h^2$. En mettant la valeur de h dans l'équation ci-dessus, il vient :

$$\delta = \frac{T}{P} R \frac{1}{\sqrt{1+\frac{T^2}{P^2}}}$$

or, le rapport $\frac{T}{P}$, c'est-à-dire, le coefficient de frottement de roulement est toujours assez petit par rapport à l'unité pour qu'on puisse négliger son quarré. Prenons, en effet, une surface molle sur laquelle il ait une valeur relative assez grande, celle des routes par exemple. On a vu que,

pour une voiture ordinaire, on avait $\frac{T}{P} = 0.03$. On aurait donc :

$$\delta = \frac{T}{P} R \times 0.99955$$

l'erreur ne serait pas d'un demi-millième, et de plus cette erreur ne changerait pas d'importance avec l'enfoncement de la roue sur le terrain, car elle ne dépend que du rapport $\frac{T}{P}$ que l'expérience a démontré invariable. On peut donc écrire :

$$T = P \frac{\delta}{R}$$

D'après cette équation on voit que la résistance au roulement n'est autre chose que la résultante verticale des réactions moléculaires qui ont lieu dans l'étendue du contact, nécessairement égale à la pression, multipliée par sa distance au rayon vertical et divisée par ce rayon. Il ne faudrait pas confondre cette résistance avec la force F. On a bien ici, il est vrai :

$$T = F = P \frac{\delta}{R}$$

mais c'est une circonstance particulière du cas que nous avons considéré. C'est là, au reste, une erreur théorique qu'ont commise presque tous ceux qui se sont occupés de cette résistance ; nous venons de voir, en effet, que la hauteur h de cette force était un infiniment petit qu'on pouvait négliger. Or, il ne faut pas perdre de vue que le cercle en s'avançant tourne autour du point de contact. Cette hauteur h étant le bras de levier de la force F par rapport à l'axe instantané de rotation, cette dernière ne saurait donc avoir aucun effet pour avancer ou retarder le corps ; elle change d'ailleurs, suivant les cas, d'intensité et de direction, comme on va le voir dans les exemples suivants :

Supposons qu'à une distance e du centre, *fig.* 3, il y ait un frottement $f'p'$, comme celui de l'essieu sur le moyeu et agissant en sens inverse sur ces deux parties. Il est clair qu'on aura encore les deux équations suivantes :

Pour qu'il n'y ait pas translation du centre de gravité :

$$F = T$$

Pour qu'il n'y ait pas rotation :

$$TR = P\delta + f'p'e$$

d'où

$$T = F = P\frac{\delta}{R} + f'p'\frac{e}{R}$$

Voilà donc cette force horizontale F égale, non-seulement à la résistance du plan, mais à celle de l'essieu, c'est-à-dire au frottement de roulement qui a lieu à la bande de la roue augmenté du frottement de glissement qui a lieu à l'essieu.

Appliquons maintenant à la bande de la roue, *fig.* 4, un autre frottement comme celui du frein à enrayer, et représentons par $f''p''$ cette nouvelle résistance. Les mêmes raisonnements nous conduiront aux équations :

$$T = F = P\frac{\delta}{R} + f'p'\frac{e}{R} + f''p''$$

Cette force F s'est donc encore accrue de cette nouvelle résistance ajoutée à la bande, et elle continuerait de croître ainsi avec toutes celles qui viendraient s'opposer à la rotation de la roue; cependant, cet accroissement aurait une limite F'P égale au frottement de première espèce, à partir de laquelle la roue glisserait sans tourner.

Supposons maintenant, *fig.* 5, que la roue, au lieu d'être mise en mouvement par une force horizontale T, le soit par un couple dont on pourra transformer les forces de manière que le bras de levier soit le rayon. Pour que l'équilibre subsiste, il faut que la réaction de

terrain ne donne lieu qu'à une force verticale P agissant à une distance δ telle qu'on ait :

$$qR = P\delta \qquad \text{d'où } q = \frac{P\delta}{R}$$

dans ce cas, la composante horizontale est complétement nulle. De sorte que, dans le mouvement uniforme de cette roue, le terrain n'est poussé ni en avant ni en arrière; il n'est que comprimé. Une locomotive s'avançant seule d'un mouvement uniforme réaliserait cette hypothèse.

Le moteur étant toujours un couple $(q, -q)$, *fig.* 6, supposons la roue retenue en arrière par un tirage θ qui sera, par exemple, le tirage d'un convoi de waggons. Il est évident que, pour l'équilibre, il faut que la force F agisse maintenant dans le sens du mouvement et soit égale à θ, pourvu toutefois que θ ne dépasse pas F'P, auquel cas la roue glisserait sans avancer.

Dans tous les cas que nous venons de considérer, la résistance du terrain est toujours mesurée par $P\frac{\delta}{R}$. C'est toujours la force verticale égale à la pression agissant à une distance δ en avant de la normale : la force horizontale est variable depuis o jusqu'à F'P et agit tantôt en avant, tantôt en arrière.

Supposons maintenant que le plan sur lequel roule la roue, *fig.* 7, fasse un angle α avec l'horizon; la direction du mouvement étant toujours horizontale, la force F agira transversalement au plan de la roue et fera un angle β avec lui. On aura :

$$F\cos.\beta = T = P\frac{\delta}{R}$$

$$F\sin.\beta = P\sin.\alpha$$

d'où

$$F = \sqrt{P^2\sin.^2\alpha + T^2} \;.\; \text{tang.}\,\beta = \sin.\alpha\frac{P}{T}$$

$$F = P\sqrt{\sin.^2\alpha + \frac{\delta^2}{R^2}}$$

Lorsque le frottement de roulement est fort petit, on voit que l'angle α du plan incliné peut croître presque jusqu'à F', angle du frottement, sans que pour cela le cylindre descende le long de ce plan. C'est ce qu'il est facile de vérifier par l'expérience. Un cylindre poussé ou tiré horizontalement en travers d'un plan incliné roule, sans descendre, quelle que soit l'inclinaison de ce plan (au-dessous de F'), tandis qu'un cube qui ne peut que glisser descendra dans les mêmes circonstances. C'est, au reste, une expérience qui se présente tous les jours aux yeux, dans les rues de Paris; on voit les voitures se mouvoir en ligne droite sur le revers de chaussées très-inclinées tandis que les traîneaux tombent sans cesse dans les ruisseaux. Ainsi, dans les chemins de fer, la surélévation des rails (toujours bien au-dessous de ce qu'il faudrait pour incliner les essieux suivant l'angle du frottement) ne peut avoir pour effet de jeter le convoi sur le rail inférieur. Si les roues étaient enrayées, tous les waggons descendraient, au contraire, immédiatement.

Lorsque le tirage devient oblique au plan de la roue, des effets analogues se produisent; la roue ne cesse de se mouvoir dans son plan qu'autant que la composante du tirage qui lui est perpendiculaire approche de F'P (*).

Nous n'avons pas l'intention d'examiner ici tous les cas particuliers du mouvement des roues; nous avons voulu, seulement, faire voir que dans ce mouvement la résistance à la rotation n'était pas une force située dans le plan sur lequel la roue se meut; mais au contraire une force perpendiculaire à ce plan, égale à la pression agissant à une distance δ de la normale; tandis que la force située dans le plan horizontal est variable, d'intensité depuis o jusqu'à F'P,

(*) A l'aide de ces considérations, on peut rectifier une erreur qui se trouve dans l'article de M. Navier sur le mouvement uniforme des waggons (2e semestre 1834), et que nous avons laissée subsister dans la note où nous avons repris les calculs de ce savant ingénieur.

et de direction, pouvant agir dans tous les sens autour du point de contact, même dans le sens du mouvement.

La résistance au roulement se trouvant déterminée d'une manière précise, on va voir que de la propriété d'être proportionnelle à la pression résultent de suite des conséquences importantes. En effet, puisque l'expression $T = P\frac{\delta}{R}$ est proportionnelle à P, il s'ensuit que $\frac{\delta}{R}$ est une quantité constante dans une même roue; si vous admettez de plus, comme M. Morin, qu'elle est en raison inverse du diamètre, il faudra en conclure que δ est une quantité constante dans toutes les roues; or, cette quantité δ est une quantité finie; ainsi lorsque vous trouvez pour une roue de $2^m.00$ de diamètre un tirage $\frac{T}{P} = 0.03$, vous en conclurez que δ est égal à $0^m.03$. Or, la résistance des réactions moléculaires qui ont lieu au contact passe nécessairement dans l'étendue du contact; la loi supposée ne peut donc être vraie pour le rayon $0^m.03$; elle ne peut même pas être vraie pour le rayon égal à $0^m.06$, car non-seulement la résultante ne peut pas passer à l'extrémité du contact, mais il faut que le contact en avant de la normale soit bien plus grand que 2δ, puisque les réactions moléculaires vont en croissant vers la normale et en décroissant vers l'extrémité du contact. En jetant les yeux sur la *fig.* 8, on voit de suite que $mn > Mm$ ou δ, donc $Mn > 2\delta$. Ainsi, voilà l'absurdité poussée jusqu'au diamètre $0^m.12$ pour le cas que nous avons pris pour exemple. La loi des diamètres telle que l'a donnée M. Morin ne peut donc pas exister d'une manière continue.

Il en est de même de l'influence de la largeur de la bande. Nous venons de voir que de la proportionnalité du tirage à la pression il en résultait nécessairement que la quantité δ était constante dans un même cercle, pour des pressions diverses. Ainsi, si on partage la largeur L

d'une roue en zones *dl*, dans chacune de ces zones la résultante *dp* des réactions moléculaires passera toujours à la même distance δ de la normale ; or, toutes ces forces parallèles situées sur une même ligne s'ajouteront entre elles et auront une résultante égale à P et située à la distance δ, puisqu'elles sont toutes situées à cette distance ; la largeur L ne change donc ni l'intensité de cette résultante, ni sa distance à la normale : elle n'en modifie donc pas l'énergie.

Ainsi les principes les plus élémentaires de la géométrie et de la statique suffisent pour démontrer que dès que le tirage est proportionnel à la pression, il est indépendant de la largeur de la bande (ce qui se voit du reste à priori), enfin qu'il ne peut être en raison inverse du diamètre. En ajoutant à ces premières notions quelques considérations d'un ordre plus élevé, on est conduit directement aux lois du frottement de seconde espèce telles que nous les ont données nos expériences.

La propriété physique des corps solides de se contracter et de se dilater sous l'influence des divers degrés de chaleur, conduit à les considérer comme un assemblage de molécules tenues respectivement en équilibre par les diverses forces qui agissent sur elles. Si une force quelconque P vient presser la molécule *a* de la surface, *fig.* 9, l'équilibre qui existait antérieurement sera troublé, et la molécule *a* va se mouvoir dans le sens de la force P; mais ce mouvement, en rapprochant et en écartant cette molécule des molécules voisines, augmente les forces répulsives et attractives auxquelles elle se trouve soumise, de sorte qu'il s'établit bientôt un autre équilibre en a_1, *fig.* 10; par conséquent il existe dans cette position une réaction S égale et contraire à la force P. Supprimons maintenant la force P, *fig.* 11; l'équilibre sera troublé encore une fois et la molécule tendra à revenir dans la direction de la force S. Si le corps était parfaitement élastique, elle reviendrait jusqu'à sa première position en *a*, mais cela

n'aura pas lieu généralement, parce que la contraction altère et la disposition des molécules et l'intensité des forces qui agissent sur elles; de sorte que la molécule comprimée ne reviendra qu'en a_3, *fig.* 12. Nous appelons ε' la contraction instantanée aa'_3 et ε la dépression définitive aa_3. Ces deux quantités dépendent l'une de l'autre suivant une relation que nous ne connaissons pas. On peut donc écrire $\varepsilon = \varphi(\varepsilon')$. En résumé, toute compression instantanée d'une molécule est toujours suivie d'une détente qui ne peut être nulle et qui n'est jamais égale à la dépression pour les corps qui ne sont pas parfaitement élastiques.

Examinons maintenant la manière dont l'intensité de la réaction varie suivant la profondeur z de l'enfoncement: tant qu'elle enfonce, cette réaction S dépend du degré de ce déplacement par rapport à la position primitive; mais quand cette molécule revient, sa réaction se trouve dépendre de sa distance à sa position définitive ou de retour, de sorte qu'en repassant par les mêmes points, la réaction n'a pas la même valeur. Pour exprimer son intensité d'une manière uniforme, nous dirons que, dans la compression comme dans la détente, la réaction est fonction de la distance à la position de retour ou ,

$$f[z - \varphi(z)] \text{ dans la compression}$$
$$f[z - \varphi(\varepsilon')] \text{ dans la détente}$$

Si nous nous sommes étendu sur ces notions élémentaires de la constitution des corps solides, c'est que déjà on a essayé de les introduire dans le calcul, et qu'elles ont conduit à des résultats contraires à ceux auxquels nous allons arriver, ou plutôt à des résultats incomplets. Dans ces calculs on n'a eu égard qu'à la compression des molécules; on a négligé l'effet de la détente. Or, comme on vient de le voir, dès que la compression n'est pas indéfinie, dès qu'il s'établit une position d'équilibre sous une pression, il faut qu'il y ait détente quand cette pression

cesse. De plus on avait introduit dans ces calculs des hypothèses sur la relation qui existe entre la résistance et l'enfoncement, qui pouvaient laisser du doute sur les résultats. On va voir que toutes les lois du frottement de seconde espèce peuvent se déduire d'une formule générale qui établit entre elles des relations indépendantes de toute hypothèse. Soient donc, *fig.* 13 :

ε la compression définitive du terrain ou frayé $= \varphi(\varepsilon')$;

ε' la compression instantanée maximum correspondant à la normale ;

λ la longueur du contact en arrière $= \sqrt{2R(\varepsilon' - \varepsilon)}$

λ' la longueur du contact en avant $= \sqrt{2R\varepsilon'}$

P le poids de la roue ;

L la largeur de la bande ou longueur du cylindre ;

y l'ordonnée de la tranche que nous considérons dans le cylindre (nous n'aurons égard que plus tard à cette variable) ;

x l'abscisse d'un point du cercle dans le contact ;

z' son enfoncement au-dessous du plan primitif pour la partie antérieure du contact ;

z son enfoncement au-dessous du frayé pour la partie postérieure du contact.

En appelant f, f_1, F, F_1, χ, ... des fonctions différentes, on aura évidemment

$$P = L\left\{\int_0^{\lambda'} f(z')\,dx + \int_0^{\lambda} f_1(z)\,dx\right\}$$

c'est-à-dire que la somme des réactions verticales des molécules dans l'étendue du contact est égale à la pression du cylindre sur le plan.

Les molécules situées en avant du contact s'opposent à la rotation avec une énergie mesurée par $f(z')\,x\,dx$; celles situées en arrière favorisent cette rotation avec une énergie mesurée par $f_1(z)\,x\,dx$. Prenons la différence

des moments, et cherchons la distance δ de la résultante P à la normale, nous aurons

$$P\delta = L\left\{\int_0^{\lambda'} f(z')\,x\,dx - \int_0^{\lambda} f_1(z)\,x\,dx\right\}$$

Ces deux équations détermineraient nécessairement δ si les diverses fonctions que nous avons introduites dans le calcul étaient elles-mêmes déterminées, et on déduirait les propriétés du frottement de roulement, de l'équation

$$T = P\frac{\delta}{R}$$

C'est la marche qui a été suivie jusqu'à présent par ceux qui se sont occupés de cette question. On faisait des hypothèses sur les fonctions que nous avons désignées par f, et on en tirait des propriétés correspondantes du frottement de roulement (*voyez* le Mémoire de Gerstner, p. 12, les *Annales des ponts et chaussées*, 1832, 2e sem., p. 184). De plus, les deux équations qui remplaçaient celles que nous venons de poser, étaient incomplètes; elles ne tenaient pas compte de la réaction en arrière du contact, de sorte que leurs résultats n'auraient pu conduire à la vérité, quand bien même les hypothèses eussent été exactes. Il y a plus, c'est que les propriétés du frottement ne dépendaient de ces hypothèses que par suite de cette erreur de calcul, ou plutôt de principe, ainsi qu'on va le voir tout à l'heure.

Mettons maintenant dans les intégrales les valeurs de z tirées de l'équation du cercle, en y négligeant toutefois les quarrés ε'^2 et $(\varepsilon'-\varepsilon)^2$, ce qui revient à assimiler le cercle à une parabole dans l'étendue du contact : nous aurons

$$z' = \varepsilon'\left(1 - \frac{x^2}{\lambda'^2}\right) \qquad z = (\varepsilon'-\varepsilon)\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2}\right)$$

Posons $\frac{x}{\lambda'} = u$ dans la première intégrale,

$\frac{x}{\lambda} = u$ dans la seconde,

il viendra :

$$P = L\lambda' \int_0^1 f[\varepsilon'(1-u^2)]\,du + \lambda \int_0^1 f_1[\varepsilon'(1-u^2), \varepsilon']\,du$$

Mettant pour λ' et λ leurs valeurs, remarquant que les intégrales prises entre 0 et 1 ne contiennent plus u, mais seulement ε', il vient

$$P = \sqrt{2R}\,L.F(\varepsilon')$$

Ces mêmes transformations dans l'équation des moments donnent

$$P\delta = L.R.F(\varepsilon')$$

d'où on tire

$$P\frac{\delta}{R} = T = L.F(\varepsilon')$$

Cette dernière équation eût pu être écrite immédiatement, car, comme M. Coriolis l'a fait voir dans l'article que nous avons cité plus haut, le tirage n'est autre chose que le travail perdu dans le sol par le passage de la roue. Ainsi, dans toute la largeur du frayé, ces molécules ont été comprimées jusqu'en ε'; il y a là donc nécessairement une déperdition de force vive égale à $LF(\varepsilon')$.

Maintenant, de la valeur de $P = L\sqrt{2R}.F(\varepsilon')$, on tirera

$$\varepsilon' = \chi\left(\frac{P}{L\sqrt{2R}}\right)$$

et mettant cette valeur dans celle de T, on obtiendra

$$T = L.F\left(\frac{P}{L\sqrt{2R}}\right)$$

qui doit représenter le tirage dans toutes les hypothèses possibles. Au lieu de faire une hypothèse, il est plus rationnel d'emprunter à l'expérience une quelconque des propriétés de cette résistance. Or, celle d'être proportionnelle à la pression est, à ce qu'il nous semble, hors de discussion; car, quand bien même les expérimentateurs ne se seraient pas trouvés d'accord sur ce point,

c'est un fait de pratique trop connu pour qu'il soit permis d'en douter. En introduisant cette propriété dans la formule ci-dessus, elle devient en appelant ρ une constante,

$$T = \rho \frac{P}{\sqrt{2R}}$$

ce qui est l'expression générale du frottement de roulement, telle que nous l'avons déduite de nos nombreuses expériences. On pourrait de même supposer, dans l'équation générale, que le tirage est indépendant de la largeur de la bande ou en raison inverse de la racine quarrée du rayon, et on arriverait toujours à la même équation; c'est-à-dire, que ces propriétés sont réciproques et ne peuvent exister l'une sans l'autre, et peuvent être déduites de l'analyse même. Avant d'aller plus loin, qu'il nous soit permis de faire remarquer que nos expériences nous ont donné précisément, non pas une de ces lois, mais toutes; ne résulte-t-il pas de cet accord une confirmation réciproque qui rejaillit des expériences sur la théorie et de la théorie sur les expériences? Ne peut-on pas dire que nos expériences sont exactes, parce qu'elles sont d'accord avec la théorie, et que notre théorie est exacte, parce qu'elle est d'accord avec l'expérience?

Les calculs que nous venons de faire supposent implicitement que la réaction d'une molécule déplacée n'est fonction que de son déplacement. C'est là une hypothèse admise dans beaucoup de théories physiques et confirmée par l'expérience. Dans la théorie de la résistance des solides, par exemple, non-seulement cette hypothèse est admise, mais on y admet encore que cette résistance est proportionnelle à la première puissance du déplacement. Cette loi a même une telle influence sur les résultats, qu'ils seraient entièrement changés, si on admettait par exemple que la réaction est proportionnelle au quarré ou au cube des déplacements; à plus forte raison seraient-ils

bouleversés, dans le cas où on supposerait que la réaction d'une molécule déplacée dans un solide, dépend de la vitesse de son déplacement, de la forme de ce solide et de sa position dans le solide. Peut-être pourrions-nous dire que dans cette hypothèse la théorie de la résistance des solides dépasserait la portée de l'analyse et même de l'expérience, du moins nous ne concevrions pas comment on pourrait établir entre les résultats une liaison qui pût servir de règle à des cas non expérimentés. Les résultats, au contraire, de la théorie du frottement de roulement, que nous venons de donner résistent à toutes ces hypothèses; c'est ce qu'on peut reconnaître par un examen détaillé des formules.

Nous avons dit que la réaction d'une molécule déplacée était une fonction de sa distance à sa position de retour, de sorte qu'au point plus bas M, *fig.* 14, cette résistance était fonction de $\varepsilon' - \varepsilon$; en avant de ce point elle sera donc fonction d'une ordonnée x' comprise entre le cercle et une courbe inconnue que nous pourrons représenter dans l'étendue du contact par une parabole ayant ε pour flèche, de manière qu'on aura :

$$z' = \varepsilon'\left(1 - \frac{x^2}{\lambda'^2}\right) - \varepsilon\left(1 - \frac{x^2}{\lambda'^2}\right) = (\varepsilon' - \varepsilon)\left(1 - \frac{x^2}{\lambda'^2}\right)$$

la réaction en arrière sera une fonction de l'ordonnée z, qui s'arrête à la distance ε

$$z = (\varepsilon' - \varepsilon)\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2}\right)$$

écrivons maintenant que ces réactions dépendent, en outre, de la position y qu'elles occupent dans le cylindre par rapport à sa longueur L; de cette longueur L; du rayon R; de la vitesse V du mouvement; nous aurons

$$P = \int_0^Y \int_0^L f\left[(\varepsilon' - \varepsilon)\left(1 - \frac{x^2}{\lambda'^2}\right), y, L, R, V\right] dy dx +$$

$$+ \int_0^\lambda \int_0^L f\left[(\varepsilon' - \varepsilon)\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2}\right), y, L, V, R\right] dy dx$$

en intégrant par rapport à y, puis faisant les transformations désignées ci-dessus, on arrivera à l'équation suivante

$$P = \sqrt{2R}\,(\sqrt{\varepsilon'} + \sqrt{\varepsilon' - \varepsilon}) \int_0^1 f[(\varepsilon' - \varepsilon)(1 - u^2), L, R, V]\,du$$

on obtiendra de même par l'équation des moments :

$$Pz = 2R \,.\, \varepsilon \int_0^1 f(\varepsilon' - \varepsilon)(1 - u^2), L, R, V)\,u\,du$$

en divisant ces équations l'une par l'autre, on arrivera à

$$\frac{T}{P} = \frac{1}{\sqrt{2R}}\,(\sqrt{\varepsilon'} - \sqrt{\varepsilon' - \varepsilon})\,\frac{\int_0^1 f[(\varepsilon' - \varepsilon)(1 - u^2), L, R, V]\,u\,du}{\int_0^1 f[(\varepsilon' - \varepsilon)(1 - u^2), L, R, V]\,du} =$$

$$= \text{constante.}$$

Or, il est facile de reconnaître que la division des deux intégrales doit toujours se réduire à un nombre, quelle que soit la fonction f. On peut en effet l'ordonner par rapport aux puissances de $(\varepsilon' - \varepsilon)(1 - u^2)$,

$$A(\varepsilon' - \varepsilon)(1 - u^2) + B(\varepsilon' - \varepsilon)^2(1 - u^2)^2 + C(\varepsilon' - \varepsilon)^3(1 - u^2)^3 \ldots$$

A, B, C... étant des fonctions de L, R, V.

Il est clair d'abord que dans le cas où on supposerait la résistance proportionnelle à une puissance m quelconque de déplacement, ce qui avait semblé à Gerstner être l'hypothèse la plus large possible, on aurait

$$\frac{\int_0^1 (\varepsilon' - \varepsilon)^m (1 - u^2)^m u\,du}{\int_0^1 (\varepsilon' - \varepsilon)^m (1 - u^2)^m\,du} = \frac{\int_0^1 (1 - u^2)^m u\,du}{\int_0^1 (1 - u^2)^m\,du}$$

c'est-à-dire une fonction du nombre m facile à calculer. Dans le cas où la résistance serait proportionnelle à plusieurs puissances de la variable, mais où les coefficients

qui contiennent R, L, V, pourraient se séparer de manière qu'on eût:

$$f[(\varepsilon'-\varepsilon)(1-u^2), R, L, V] = f_1(R, L, V) f_2[(\varepsilon'-\varepsilon)(1-u^2)]$$

le résultat serait encore rigoureusement le même. Enfin, le cas général d'une fonction quelconque peut se ramener aux précédents, en observant qu'on peut négliger dans le développement des fonctions le quarré et les puissances supérieures de $(\varepsilon'-\varepsilon)$. Les valeurs de P et de $P\delta$, en effectuant l'intégration, peuvent se mettre sous la forme

$$P = \sqrt{2R}(\sqrt{\varepsilon'}+\sqrt{\varepsilon'-\varepsilon})\left[\tfrac{2}{3}A(\varepsilon'-\varepsilon)+\tfrac{8}{15}B(\varepsilon'-\varepsilon)^2+\tfrac{16}{28}C(\varepsilon'-\varepsilon)^3\ldots\right]$$

$$P\delta = 2R\,.\,\varepsilon\,.\left[\tfrac{1}{4}A(\varepsilon'-\varepsilon)+\tfrac{4}{6}B(\varepsilon'-\varepsilon)^2+\tfrac{1}{8}C(\varepsilon'-\varepsilon)^3\ldots\right]$$

On reconnaît facilement alors que les termes qui contiennent $(\varepsilon'-\varepsilon)^2$ peuvent être négligés par rapport au premier terme $A(\varepsilon'-\varepsilon)$. On peut même conserver le quarré et ne négliger que la troisième puissance, et on va voir que le résultat sera encore à fort peu de chose près le même, car les coefficients de A et de B, dans les deux fonctions, étant à peu près dans le même rapport, la division peut s'effectuer. On a, en effet:

$$\frac{T}{P} = \frac{1}{\sqrt{2R}}(\sqrt{\varepsilon'}-\sqrt{\varepsilon'-\varepsilon})\,\frac{3}{5}\left(\frac{A+\frac{4}{3}B(\varepsilon'-\varepsilon)}{A+\frac{4}{5}B(\varepsilon'-\varepsilon)}\right)$$

Or, la fraction entre parenthèses se confond à peu près avec l'unité. En conservant les infiniment petits du second ordre, les résultats ne se trouvent donc pas sensiblement différents de ce qu'ils sont lorsqu'on ne conserve que les premières puissances.

Cette discussion analytique, à laquelle j'ai cru devoir me livrer pour répondre à des objections qui m'ont été faites, va d'ailleurs être éclaircie par une démonstration géométrique des propriétés du frottement de roulement, et qui a l'avantage d'être élémentaire.

Représentons la réaction maximum qui a lieu sous la

normale, *fig.* 14, par l'ordonnée $BM = (\varepsilon' - \varepsilon)$. Elle sera alors exprimée par $A(\varepsilon' - \varepsilon)$ à ce point, et entre M et A, en avant de la normale, par l'ordonnée $n'n$ comprise entre le cercle et une courbe inconnue que nous pouvons assimiler à une parabole; le triangle mixtiligne BMA' représentera donc la résultante des réactions en avant de la normale; de même, ABM représentera la résultante des réactions en arrière. Il n'y a donc qu'à ajouter leurs surfaces pour avoir la résultante des réactions verticales. On a

$$P = \tfrac{2}{3} AL\,(\varepsilon' - \varepsilon)\,(\lambda + \lambda') = \tfrac{2}{3} AL\,\sqrt{2R}\,(\varepsilon' - \varepsilon)\,(\sqrt{\varepsilon'} + \sqrt{\varepsilon' - \varepsilon})$$

Prenons de même la différence des moments de la résultante en avant et de la résultante en arrière, ou le centre de gravité des deux triangles mixtilignes, nous aurons, en se rappelant que le centre de gravité du segment parabolique est aux $\frac{3}{8}$ de la base :

$$P\delta = \tfrac{1}{4} AL\,(\varepsilon' - \varepsilon)\,(\lambda''' - \lambda'') = \tfrac{1}{4} AL \,.\, 2R\,(\varepsilon' - \varepsilon)\varepsilon$$

d'où

$$T = \frac{P\delta}{R} = \tfrac{1}{4} AL \,.\, 2(\varepsilon' - \varepsilon)\varepsilon$$

et

$$\frac{T}{P} = \tfrac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{2R}} (\sqrt{\varepsilon'} - \sqrt{\varepsilon' - \varepsilon})$$

Les quantités ε' et ε varient avec la charge pour une même roue. Il est bien évident que plus la charge augmente, plus la roue enfonce, plus le frayé est profond : le rapport $\frac{T}{P}$ ne peut donc être constant qu'à la condition

$$\tfrac{3}{4} (\sqrt{\varepsilon'} - \sqrt{\varepsilon' - \varepsilon}) = \rho$$

on a donc :

$$T = \rho \frac{P}{\sqrt{2R}}$$

équation semblable à celle que nous avons déduite plus haut de considérations purement analytiques et dont on peut tirer les mêmes conséquences pour les propriétés du tirage.

Cette démonstration fait voir le rôle tout à fait secondaire que joue dans les propriétés du frottement la loi de la réaction des molécules. Cette loi, si elle était connue, ne servirait qu'à déterminer rigoureusement la courbe $Bn'A'$. Or, on sait qu'elle est tangente à l'horizontale en B et qu'elle passe par le point A'; de plus ε, ou la flèche de cette courbe, est un infiniment petit du second ordre par rapport à la longueur λ', de sorte que, quel que soit le tracé de cette courbe, il est bien évident que la surface du triangle BMA' ne saurait subir que des variations insignifiantes et à plus forte raison la position de son centre de gravité. Dans les calculs de Gerstner et dans ceux de M. Coriolis, les propriétés du frottement de roulement dérivent, au contraire, uniquement de cette loi. Lorsqu'on n'admet pas de réaction en arrière, ou plutôt lorsqu'on omet cette réaction, car on n'est pas libre de l'admettre ou de ne pas l'admettre, on a les équations suivantes dans le cas général :

$$P = L\sqrt{2R}\sqrt{\varepsilon'}\left[\tfrac{2}{3}A\varepsilon' + \tfrac{6}{7}B\varepsilon'^2 \ldots\ldots\right]$$

$$T = L \cdot 2\varepsilon' \left[\tfrac{1}{4}A\varepsilon' + \tfrac{1}{6}B\varepsilon'^2 \ldots\ldots\right]$$

et les relations entre T, P, L se trouvent tout à fait déterminées par l'élimination de ε' entre les deux équations. Ainsi, dans le cas où on suppose la réaction proportionnelle à la première puissance de l'enfoncement, ces équations se réduisent à :

$$P = \tfrac{2}{3}AL\varepsilon'^{\frac{3}{2}}$$

$$T = \tfrac{1}{4}LA\varepsilon'^2$$

d'où on tire

$$T = f\frac{P^{\frac{4}{3}}}{L^{\frac{1}{3}}R^{\frac{2}{3}}}$$

C'est à ces calculs que le rapporteur de la commission de l'Académie faisait allusion dans ce passage du rapport :

« On peut remarquer que par des considérations théoriques, basées sur l'hypothèse que le sol de la route résiste en chaque point, en raison directe de l'enfoncement, on trouve que le tirage est proportionnel à la puissance $\frac{4}{3}$ du chargement et en raison inverse de la puissance $\frac{2}{3}$ du diamètre des roues. Ces exposants diffèrent assez peu de l'unité qu'on doit leur substituer, d'après les expériences de M. Morin pour ne pas donner de présomption défavorable aux résultats de ses observations. »

Dès que l'Académie se contentait d'une coïncidence aussi imparfaite entre les expériences et la théorie qu'elle invoquait, j'aurais pu faire observer que la puissance $\frac{1}{2}$ que mes expériences donnaient au rayon s'approchait encore plus de la puissance $\frac{2}{3}$ de la théorie que la puissance 1 qui ressortait des expériences de Coulomb et de M. Morin; j'aurais encore pu faire remarquer que, même dans cette théorie, basée sur des hypothèses incomplètes, il n'en résultait pas moins, en mettant dans la valeur de T celle de ϵ' tirée de celle de P, l'équation générale obligée

$$T = LF\left(\frac{P}{L\sqrt{2R}}\right)$$

Que si donc, par condescendance pour des expériences qui se présentaient avec de grandes garanties d'exactitude, on voulait bien admettre P à la place de $P^{\frac{4}{3}}$, on ne pouvait pas, à la place de $R^{\frac{2}{3}}$, mettre R^1, c'est-à-dire diminuer un exposant et augmenter l'autre; car leur rapport dans cette théorie devait être égal à 2, et on le faisait égal à 1.

Les différentes manières dont nous avons présenté la question jusqu'à présent, doivent avoir fait voir que cette loi des diamètres tient uniquement à la relation qui existe dans le cercle entre les flèches ϵ' et un petit arc λ'

$$\lambda' = \sqrt{2R\epsilon'}$$

Cette loi des diamètres tient donc à une propriété géométrique et non pas à une propriété mécanique des forces qui relient entre elles les molécules des corps.

La formule générale que nous venons de rappeler donne la relation que la géométrie établit nécessairement entre les quantités T, P, L, R, non-seulement dans la réalité, mais dans toutes les hypothèses. Ainsi dans le cas où le tirage serait en raison inverse de la loi des diamètres, comme l'ont supposé Coulomb et M. Morin, on aurait nécessairement

$$T = \rho \frac{P'}{2LR}$$

Ainsi, dans ce cas, le tirage serait proportionnel au quarré de la pression. Or, en vérité, il n'est pas besoin d'expériences pour démontrer qu'il n'en peut être ainsi. Si, en doublant la charge, il fallait mettre quatre chevaux au lieu de deux; vingt-cinq chevaux au lieu de cinq quand on passe de la charrette ordinaire du cultivateur qui porte 1 200 kilogrammes à la charrette du roulage qui en porte 6 000, il y a longtemps que cette propriété serait connue. Il en est de même de la largeur de la bande; si en la doublant le tirage diminuait de moitié, c'eût été une disposition par trop avantageuse pour qu'elle fût restée si longtemps ignorée, et, certes, jamais le législateur n'aurait eu besoin d'avoir recours aux lois pour la prescrire. Si l'industrie du roulage a toujours cherché à augmenter ses chargements et à diminuer ses bandes, c'est qu'elle savait, préalablement à toute expérience scientifique, que le tirage était proportionnel à la charge et indépendant de la largeur des bandes; que, par conséquent, plus elle chargeait ses voitures et diminuait ses bandes, plus elle augmentait le poids utile transporté. Nous avons fait voir, dans notre Essai, que cette industrie a été plus loin et qu'elle a résolu le problème du diamètre de manière à se donner toujours le minimum de tirage.

Les propriétés que nous avons démontrées par l'expérience et par la théorie l'étaient donc déjà par les usages du roulage; et il en est à peu près de même dans toutes les anciennes industries. Il est bien rare qu'à l'aide de nombreux tâtonnements, le hasard ne fasse pas rencontrer à la longue les procédés les plus économiques et les plus avantageux, et que lorsque la science vient à s'en occuper, elle n'ait plus qu'à les constater et à les expliquer.

Ainsi, par exemple, dans l'hypothèse de la loi de la raison inverse des diamètres, l'usage de ces camions à petites roues, dont on se sert pour transporter les ballots de roulage à domicile, serait inexplicable. Leurs roues, en effet, n'ont que $0^m.40$ à $0^m.50$ et quelquefois moins, c'est-à-dire que le tirage de ces camions devrait être quatre fois plus considérable que celui des voitures ordinaires de roulage. On sait que, sur les voitures, on ne donne ordinairement à tirer à un cheval que 1 000 à 1 200 kilogrammes; sur un camion, il ne devrait donc tirer que 250 à 300 kilogrammes. Or, le poids seul du camion est beaucoup plus considérable. Celui qui servait à nos expériences pesait, avec des roues de $0^m.34$, 380 kilogrammes. Si la loi de Coulomb était exacte, il serait donc impossible d'y ajouter la moindre charge, puisqu'on n'y attelle qu'un cheval; et cependant ne les rencontre-t-on pas tous les jours avec des charges considérables; il faut donc nécessairement que le tirage ne croisse pas aussi rapidement que le diamètre diminue.

Les calculs que nous venons de faire supposaient qu'il n'y avait d'altération que dans la surface sur laquelle la rotation s'opère, que la roue conservait exactement sa courbure, ou que du moins sa flexion pouvait être négligée par rapport à celle du terrain, comme dans le cas des roues et des routes ordinaires. On peut se demander si les propriétés que nous avons démontrées restent les mêmes lorsqu'il n'en est pas ainsi, c'est-à-dire lorsque les duretés

des deux surfaces sont peu différentes, comme sur les chemins de fer.

Appelons, *fig.* 15, e' la compression maximum instantanée de la roue, e la compression définitive. En conservant toutes les notations précédentes, on aura :

$$\lambda' = \sqrt{2R(\varepsilon' + e')} \qquad \lambda = \sqrt{2R(\varepsilon' + e' - \varepsilon - e)}$$

En considérant ensuite les réactions des molécules du terrain comprimé, la même série de raisonnements conduira à des équations semblables à celles que nous avons posées plus haut; seulement les équations contiendront à la fois ε' et e'. On aura

$$P = L\sqrt{2R}\, F(\varepsilon', e')$$

$$\delta = \sqrt{2R}\, \chi(\varepsilon', e')$$

Mais en appliquant le même calcul aux réactions du cercle comprimé qui font équilibre à celles du sol sur lequel il roule, on arrivera à des équations de la forme

$$P = L\sqrt{2R}\, F_1(e', \varepsilon')$$

$$\delta = \sqrt{2R}\, \chi_1(\varepsilon', e')$$

En divisant les deux valeurs de P l'une par l'autre, on aura

$$f(\varepsilon', e') = 0$$

qui donnera la valeur de e' en ε', $e' = f_1(\varepsilon')$. En la mettant dans la valeur de P et δ, on élimine e' et on arrive à des équations semblables à celles que nous avons établies plus haut, d'où découlent les mêmes conséquences. Ainsi, les propriétés que nous avons énoncées conviennent au cas où le plan et le corps roulants sont l'un et l'autre compressibles.

Reprenons maintenant les formules que nous avons posées plus haut :

$$\frac{T}{P} = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{2R}}(\sqrt{\varepsilon'} - \sqrt{\varepsilon' - \varepsilon})$$

$$\frac{3}{4}(\sqrt{\varepsilon'} - \sqrt{\varepsilon' - \varepsilon}) = \rho$$

en les multipliant par $\sqrt{2R}$, on en conclut

$$\lambda' - \lambda = \frac{4}{3}\rho\sqrt{2R} = \frac{8}{3}R\frac{T}{P} = \frac{8}{3}\delta$$

c'est-à-dire que dans un même cercle la différence entre le contact en avant et le contact en arrière est, quelle que soit la charge, une quantité constante $\frac{8}{3}\delta$ qu'on peut très-bien exprimer au moyen du coefficient du tirage. Ainsi, sur une route ordinaire, avec des roues de $2^m.00$, cette différence, pour un tirage de 0.03 serait de $0^m.08$. On aurait donc : $\lambda' = 0.08 + \lambda$. $\lambda' > 0.08$, d'où $\varepsilon' > 0.0032$. Enfin on tire de la seconde équation

$$\varepsilon = \frac{9}{2}\rho(\sqrt{\varepsilon'} - \frac{2}{3}\rho)$$

tous ces résultats se présentent sous une forme qui paraît fausse au premier coup d'œil. La différence $\lambda' - \lambda$ ne peut pas être constante, puisqu'il est bien évident qu'on peut charger le cercle de manière que son contact avec le terrain soit plus petit qu'une quantité donnée, $0^m.08$ par exemple, et que son enfoncement soit moindre que $0^m.0032$; de plus ε ne peut être nul qu'avec ε' et ne peut pas se présenter sous une forme négative. Il est facile d'expliquer la cause de ces espèces d'anomalies; elles tiennent évidemment à ce que l'hypothèse ou la propriété dont on est parti, du tirage proportionnel à la pression, n'est pas rigoureusement exacte, surtout pour des pressions très-faibles qui ne donnent lieu qu'à des contacts infiniment petits. Alors, en effet, la résultante ne peut plus passer à la distance δ de la normale; elle s'en approche rapidement à partir d'une certaine limite et finit par se confondre avec elle pour une pression 0, de sorte que le tirage doit dimi-

nuer alors plus rapidement que la pression. Ainsi, le calcul indique d'une manière rigoureuse que les lois trouvées par l'expérience ne peuvent être des lois absolues et sans limites.

Nous n'exposons ces considérations que pour justifier nos formules. Le cercle près de la normale étant à peu près parallèle au plan, le contact augmente rapidement d'abord avec la pression, et il serait impossible de réaliser par l'expérience les cas que nous venons de considérer, puisqu'il faudrait avoir de très-grands cercles dont les poids fussent très-petits.

Ainsi les lois déduites de nos expériences et de nos formules ne sont, sous le point de vue mathématique, que des approximations qui ne peuvent être substituées aux lois réelles, qu'entre les limites où la propriété qui leur sert de base est elle-même vraie. Tant que le tirage sera proportionnel à la pression, l'influence de la bande sera nulle, et celle du rayon sera mesurée par sa racine quarrée. Mais si jamais on parvenait à trouver cette relation d'une manière rigoureuse, les formules générales que nous avons posées plus haut, donneraient immédiatement les relations de la bande et du diamètre, correspondant à cette nouvelle propriété.

Les équations précédentes donnent les valeurs de ε' et de ε en fonction de P, L, R, T.

On a, en effet :

$$P=\tfrac{2}{3}\sqrt{2R}\,.\,L(\sqrt{\varepsilon'}+\sqrt{\varepsilon'-\varepsilon})A(\varepsilon'-\varepsilon)$$

$$T=\tfrac{1}{2}LsA\,(\varepsilon'-\varepsilon)$$

$$\varepsilon=\tfrac{2}{3}\rho(\sqrt{\varepsilon'}-\tfrac{2}{3}\rho)$$

Cette valeur de ε mise dans les deux premières, donnera celle de ε' en fonction de P ou de T, d'où on déduira celle de ε en fonction des mêmes quantités. On voit, comme nous l'avions déjà fait remarquer, que l'enfoncement

instantané ε', et le frayé définitif ε ne dépendent que de

$$L\frac{P}{\sqrt{2R}}$$

On peut, au reste, avoir des valeurs approchées de ces quantités sous une forme simple qui permet de juger de l'influence des diverses dimensions de la roue. Dans la valeur de ε on peut négliger $\frac{2}{3}\rho$ par rapport à $\sqrt{\varepsilon'}$, et écrire

$$\varepsilon = \tfrac{8}{3}\rho\sqrt{\varepsilon'}$$

équation qui est d'autant plus exacte que ε est plus grand par rapport à ρ ou par rapport à ε, car la valeur exacte de ε peut se mettre aussi sous la forme

$$\varepsilon = \tfrac{4}{3}\rho\left(\sqrt{\varepsilon'} + \sqrt{\varepsilon' - \varepsilon}\right)$$

Or $\varepsilon' - \varepsilon$, qui est la quantité dont la molécule revient après l'enfoncement instantané diffère, peu de ε', surtout pour les corps élastiques, de manière que $\sqrt{\varepsilon'} + \sqrt{\varepsilon' - \varepsilon}$ diffère peu aussi de $2\sqrt{\varepsilon'}$

Cette équation fait voir que le frayé est proportionnel à la racine quarrée de l'enfoncement instantané. Ainsi, pour produire une impression double, il faut produire un enfoncement instantané quadruple.

Cette relation entre ε et ε' que nous avons déduite des propriétés du frottement de roulement et dont on pourrait réciproquement les déduire, peut trouver des applications ou des vérifications dans des questions mécaniques qui paraissent, au premier coup d'œil, étrangères à cette résistance, telles que celles des laminoirs, du battage des monnaies, du choc des corps, etc., etc.

En faisant dans la valeur de P la simplification que nous venons d'indiquer dans celle de ε, on en tire

$$\varepsilon' = \alpha\frac{P^{\frac{2}{3}}}{L^{\frac{1}{3}}R^{\frac{1}{3}}} \qquad \varepsilon = \beta\frac{P^{\frac{1}{3}}}{L^{\frac{1}{3}}R^{\frac{1}{6}}}$$

Il résulte de ces équations que l'empreinte ou enfoncement définitif est proportionnelle à la racine cubique de la pression, en raison inverse de la racine cubique de la largeur de la bande et de la puissance $\frac{1}{6}$ du rayon. On peut encore mettre ε et ε' sous la forme

$$\varepsilon = \gamma \sqrt[3]{T} \qquad \varepsilon' = \gamma' \sqrt[3]{T^2}$$

c'est-à-dire que l'empreinte est proportionnelle à la racine cubique du tirage. Ces équations peuvent trouver une application utile dans la question de la police du roulage.

Les équations ci-dessus font voir comment la résistance au roulement

$$\frac{T}{P} = \theta = \frac{\rho}{\sqrt{2R}}$$

dépend de la flexibilité et de l'élasticité du corps. En effet, la constante ρ a pour expression

$$\rho = \tfrac{3}{8} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon'}}$$

Ainsi, pour qu'il y ait résistance, il faut que l'un des deux corps soit compressible, c'est-à-dire, que sous un poids donné, les molécules fléchissent d'une certaine quantité ε'; il faut, de plus, qu'ils ne soient pas parfaitement élastiques, c'est-à-dire que les molécules fléchies ne reviennent pas à leur première position, lorsque le poids est enlevé, mais restent à une certaine distance ε. Ces deux quantités étant données pour un certain poids, on en déduirait immédiatement le coefficient de roulement. Ainsi, le frottement de seconde espèce n'est pas une propriété particulière des surfaces, et distincte de la compressibilité et de l'élasticité; elle n'en est qu'une conséquence tellement immédiate que lorsqu'on a la mesure de ces deux propriétés pour un corps, on a aussi celle de la résistance

au roulement. Ainsi chaque surface peut être définie par rapport au frottement de seconde espèce par deux coefficients, dont on peut déduire la valeur de cette résistance, lorsqu'on la mettra en contact avec d'autres surfaces définies de la même manière.

En effet, appelons ε_a, ε'_a, ρ_a, les compressions et résistances de la surface A, sous une roue compressible ;

ε_b, ε'_b, ρ_b, les mêmes quantités pour une surface B, on aura entre ces quantités les deux relations

$$\rho_a = \tfrac{3}{8}\frac{\varepsilon_a}{\sqrt{\varepsilon'_a}} \qquad \rho_b = \tfrac{3}{8}\frac{\varepsilon_b}{\sqrt{\varepsilon'_b}}$$

Lorsqu'on fera rouler la surface A sur la surface B, la résultante ρ_{ab} de ces deux résistances se déduira par un calcul analogue à celui que nous avons fait plus haut, et on trouvera

$$\rho_{a,b} = \tfrac{3}{8}\frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{\sqrt{\varepsilon'_a + \varepsilon'_b}} = \frac{\rho_a\sqrt{\varepsilon_a} + \rho_b\sqrt{\varepsilon'_b}}{\sqrt{\varepsilon'_a + \varepsilon'_b}} = \frac{\rho_a\sqrt{\frac{\varepsilon'_a}{\varepsilon'_b}} + \rho_b}{\sqrt{\frac{\varepsilon'_a}{\varepsilon'_b}} + 1}$$

On voit que si on connaissait, pour chaque surface, les deux quantités ε et ε', on en conclurait immédiatement la résistance résultante. Il est impossible, il est vrai, de déterminer directement ces deux quantités par l'expérience (du moins nous n'en voyons pas maintenant le moyen); mais on peut facilement déterminer les quantités ρ_a, ρ_b, et les rapports $\frac{\varepsilon'_a}{\varepsilon'_b}$ qui peuvent les remplacer. Supposons que les deux surfaces mises en contact soient les mêmes, on aura

$$\varepsilon_a = \varepsilon_b \cdot \varepsilon'_a = \varepsilon'_b$$

$$\rho_{aa} = \sqrt{2}\,\tfrac{3}{8}\frac{\varepsilon_a}{\sqrt{\varepsilon'_a}} = \sqrt{2}\,\rho_a \cdot \rho_a = \frac{\rho_{aa}}{\sqrt{2}}$$

Ainsi la résistance ρ_a d'un cylindre sur un plan incom-

pressible est égale à la résistance de ce cylindre sur une surface de même nature divisée par $\sqrt{2}$. Les coefficients ρ_a, ρ_b pourront donc s'obtenir facilement par l'expérience. Faisons maintenant rouler ces cylindres A, B sur un plan M pris pour plan commun de comparaison, nous aurons

$$\rho_{am} = \frac{3}{8}\frac{\varepsilon_a + \varepsilon_m}{\sqrt{\varepsilon'_a + \varepsilon'_m}} = \frac{\rho_a\sqrt{\frac{\varepsilon'_a}{\varepsilon'_m}} + \rho_m}{\sqrt{\frac{\varepsilon'_a}{\varepsilon'_m} + 1}}$$

$$\rho_{bm} = \frac{3}{8}\frac{\varepsilon_b + \varepsilon_m}{\sqrt{\varepsilon'_b + \varepsilon'_m}} = \frac{\rho_b\sqrt{\frac{\varepsilon'_b}{\varepsilon'_m}} + \rho_m}{\sqrt{\frac{\varepsilon'_b}{\varepsilon'_m} + 1}}$$

Ces deux équations nous donnent immédiatement les rapports $\frac{\varepsilon'_a}{\varepsilon'_m}$, $\frac{\varepsilon'_b}{\varepsilon'_m}$ en fonction de ρ_a, ρ_m, ρ_{am} et ρ_{bm}; divisant ces deux rapports l'un par l'autre, on en tirera $\frac{\varepsilon'_a}{\varepsilon'_b}$, en fonction des mêmes quantités et en mettant ces valeurs dans celle de ρ_{ab}, on déterminera cette quantité. On voit que si on connaissait pour diverses surfaces A, B, C, D, etc., leur résistance au roulement sur elles-mêmes et leur résistance au roulement sur une autre surface M, prise pour terme de comparaison, on en pourrait déduire les résistances de deux quelconques des surfaces prises deux à deux, A avec B, A avec C, B avec C, etc., etc. C'est là une propriété remarquable du frottement de roulement, et qui le distingue du frottement de glissement, dont les divers coefficients ne présentent entre eux aucune relation, de manière que si on a vingt surfaces, il faut 190 coefficients pour déterminer les divers frottements de glissement qui résulteront des combinaisons deux à deux de ces surfaces, tandis que 40 suffiront pour le frottement de roulement.

Nous n'avons considéré jusqu'à présent qu'un cylindre roulant sur un plan, mais il est clair que, puisque les propriétés du frottement de roulement sont indépendantes de la largeur de la bande, elles s'étendent à tous les corps de forme quelconque, pourvu qu'on puisse négliger dans la largeur du contact, les variations de courbure des sections parallèles à celle qui passe par la normale et la direction de la vitesse.

En effet, la distance de la réaction à la normale $\delta = \frac{\rho}{\sqrt{2R}}$, ne dépend pas de la pression, elle ne dépend que du rayon R. Ainsi, quelle que soit la répartition de la pression entre toutes ces sections, la fraction de la résultante située dans cette section est toujours à la même distance δ de la normale. On peut donc appliquer les mêmes formules aux sphères, aux ellipsoïdes, etc.

Considérons maintenant le cas plus général de deux corps à courbures quelconques, *fig.* 16, roulant l'un sur l'autre. Par la normale et par la direction de la vitesse, faisons passer un plan qui coupera les deux corps suivant deux courbes tangentes auxquelles nous pourrons substituer, dans l'étendue du contact, leurs cercles osculateurs dont les rayons seront R, R_1. En supposant un enfoncement maximum et une impression ou frayé sur l'une des surfaces, nous arriverons aux mêmes équations que pour le cas du plan, et nous en tirerons aussi

$$\delta = \tfrac{3}{8}(\lambda' - \lambda)$$

Il suffit de substituer dans cette équation des valeurs de λ' et λ pour résoudre la question. Or, en appelant f la flèche de l'arc sous-tendu par la demi-corde λ', dans le cercle R_1, on a, en considérant cette dernière corde dans les deux cercles

$$\lambda' = \sqrt{2R(\delta' - f)} \text{ et } \lambda' = \sqrt{2R_1 f}$$

d'où

$$\lambda' = \sqrt{\frac{2RR_1}{R_1 + R} \cdot \varepsilon'}$$

On aura de même

$$\lambda = \sqrt{\frac{2RR_1}{R_1 + R} (\varepsilon' - \varepsilon)}$$

et par conséquent

$$\delta = \tfrac{2}{3} \sqrt{\frac{2RR_1}{R_1 + R}} (\sqrt{\varepsilon'} - \sqrt{\varepsilon' - \varepsilon})$$

Si le tirage θ est proportionnel à la pression, δ doit être invariable; $\sqrt{\varepsilon'} - \sqrt{\varepsilon' - \varepsilon} =$ constante $= \frac{4}{3}\rho$, donc

$$\delta = \tfrac{1}{3}\rho \sqrt{\frac{2RR_1}{R' + R}} \cdot \frac{\delta}{R} = \frac{T}{P} = \frac{\rho}{\sqrt{2R}} \sqrt{\frac{R_1}{R_1 \mp R}}$$

(+ pour les surfaces convexes, — pour les surfaces concaves convexes).

Telle est la formule générale qui déterminera la position de la résultante ou pression, par rapport à la normale en fonction des rayons de courbure des surfaces en contact; le mouvement des deux corps roulant l'un sur l'autre se trouve donc complétement déterminé, puisqu'on connaît l'intensité, le point d'application et la direction de la force retardatrice qui agit sur eux.

Cette formule peut recevoir des applications nombreuses dans l'étude des machines; les excentriques, les axes tournant sur des galets, les transmissions de mouvement qui se font d'une roue à l'autre sans engrenage, etc., etc.; présentent des mouvements analogues à ceux que nous venons de considérer, et la formule ci-dessus peut donner les dispositions les plus avantageuses à adopter pour diminuer la résistance; nous nous bornerons ici à en faire l'application à quelques circonstances particulières que présentent les routes.

La surface des routes en empierrement n'est pas rigou-

reusement plane, les roues parcourent une ligne sensiblement ondulée ; de sorte que la surface avec laquelle elles se trouvent en contact est tantôt concave, tantôt convexe. Voyons quelle est l'influence de cette circonstance sur le tirage. Appelons θ le tirage sur la ligne droite, θ' sur la ligne ondulée, R le rayon de la roue, R_1 celui du terrain, nous aurons pour les concavités :

$$\theta' = \frac{\rho}{\sqrt{2R}} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{R}{R_1}}} = \theta \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{R}{R_1}}}$$

pour les convexités :

$$\theta' = \frac{\rho}{\sqrt{2R}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{R}{R_1}}} = \theta \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{R}{R_1}}}$$

Si on donne à R_1 diverses valeurs, par rapport à R, on déduira de ces formules les tirages correspondants :

	CONCAVITÉS.	CONVEXITÉS.	MOYENNES.
$R_1 = 2R$	1.41θ	0.82θ	1.12θ
$R_1 = 3R$	1.22θ	0.87θ	1.05θ
$R_1 = 4R$	1.15θ	0.89θ	1.02θ
$R_1 = 5R$	1.12θ	0.91θ	1.015θ
$R_1 = 10R$	1.053θ	0.955θ	1.004θ

On voit que les flaches ont pour effet d'augmenter le tirage dans un assez grand rapport, lorsque leur courbure est très-prononcée, et que leur influence se fait d'autant plus sentir que les roues sont plus grandes. C'est un résultat assez remarquable, et qui paraît en contradiction avec la propriété ordinaire du diamètre, de diminuer le tirage, mais qui s'explique facilement lorsqu'on se reporte aux causes du tirage ; le contact, en effet, s'allonge d'autant plus que la roue est plus grande, ce qui éloigne la résultante des réactions moléculaires. Au reste, ce désavantage

de la grande roue n'est que relatif et ne peut aller jusqu'à faire qu'il n'y ait plus d'avantage à l'augmenter. En effet, R_1 étant plus grand que R, l'expression

$$\theta = \frac{\rho\sqrt{R_1}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{RR_1 - R^2}}$$

diminuera toujours avec R ; mais elle ne diminuera plus dans le rapport des racines quarrées comme sur le plan. Supposons par exemple

$R_1 = 2^m.00$ pour $R = 0.50$, on aura $\theta' = 1.15\,\rho$,
pour $R = 1.00$ $\theta' = \rho$.

Ainsi dans ce cas, en passant du rayon 1.00 au rayon 0.50, le tirage n'augmente plus que dans le rapport de 1 à 1.15 au lieu de 1 à 1.41, comme cela aurait lieu sur la ligne droite. A mesure que R_1 augmente, le diamètre reprend son avantage, et son influence s'approche de la loi de la racine quarrée.

Les flaches se raccordent avec le terrain par des parties convexes; mais en jetant un coup-d'œil sur le tableau précédent, on reconnaîtra que la convexité diminue beaucoup moins le tirage que la concavité ne l'augmente. De sorte que si on suppose une ligne ondulée, composée des mêmes courbes concaves et convexes, *fig.* 17, le tirage sur cette ligne sera toujours beaucoup plus considérable que sur la ligne droite; la différence sera d'autant plus sensible que les diamètres seront plus grands. Si le rayon des ondulations est 10 fois plus grand que celui de la roue, l'augmentation de tirage n'est que de $0.004\,\theta$, c'est-à-dire, presque imperceptible. Les flaches qu'on trouve à la surface des empierrements, ont des profondeurs très-variables ; cependant, il est rare qu'on en tolère de plus de $0^m.04$ à 0^m05. Si la partie concave a $1^m.00$ de longueur, on en conclura que son rayon est de $3^m.00$ environ. Alors le tirage sera sensiblement augmenté dans le passage de cette flache (de $\frac{1}{5}$

environ suivant le tableau ci-dessus). Mais si, à profondeur égale, la flache a $2^m.00$ de longueur, R_1 devient $12^m.50$, et l'augmentation de tirage est tout à fait insignifiante (4 pour 100), dont il faudrait déduire encore la diminution qui résulte des parties convexes du raccordement). Il faut conclure de là que les flaches courtes et profondes peuvent avoir un effet sensible sur l'augmentation du tirage; mais lorsqu'elles s'allongent de manière à avoir $2^m.00$ de longueur pour une profondeur de $0^m.04$, la route n'est guère moins roulante que si elle était parfaitement unie. Or, c'est précisément ce qui a lieu sur les routes bien entretenues; en les parcourant après une pluie, on reconnaît que leur surface n'est qu'une suite de dépressions; mais comme ces dépressions sont allongées, elles ne nuisent nullement au tirage; il n'y a que celles qui sont courtes, qui ont la forme de trous qu'il est essentiel de prévenir et de boucher. Quant aux autres, on peut attendre le moment convenable sans que le roulage ait à en souffrir. Or, c'est là un des grands principes de l'entretien des routes.

Nous ne ferons pas d'autre application de la formule générale que nous avons établie plus haut; nous n'avons cité celle-ci que comme un exemple de l'importance pratique des recherches théoriques auxquelles nous nous sommes livré. Nous avons voulu faire voir qu'il n'était pas question ici d'abstractions purement théoriques, mais au contraire des principes généraux dont la pratique la plus ordinaire pouvait avoir journellement besoin.

Toutes les propriétés du frottement de seconde espèce peuvent se résumer ainsi :

Lorsque deux corps de forme quelconque roulent l'un sur l'autre, la résultante des réactions moléculaires est toujours égale à la pression des deux corps, parallèle aux normales, dans le plan qui passe par ces normales et la direction de la vitesse, à une distance de ces normales qui est proportionnelle à la racine quarrée du rapport du pro-

duit des rayons de courbure des surfaces en contact, à leur somme ou à leur différence, suivant que les deux corps sont convexes ou que l'un d'eux est concave.

L'intensité, la direction et la position de cette résistance se trouvant ainsi déterminées, on peut déduire, dans tous les cas possibles, les effets qu'elle peut produire, des règles ordinaires de la mécanique.

TROISIÈME PARTIE. — EXAMEN DES EXPÉRIENCES DE M. MORIN SUR LE TIRAGE DES VOITURES.

Les propriétés du tirage, que je crois avoir démontrées dans ce mémoire, se trouvant en contradiction avec celles de M. Morin sur presque tous les points, je dois nécessairement expliquer à quoi tient cette différence dans les résultats. L'Académie l'avait attribuée à la plus grande précision des instruments employés par M. Morin; je vais tâcher de faire voir, en examinant aussi succinctement qu'il me sera possible le travail publié par cet expérimentateur, que c'est ailleurs qu'il faut en chercher la cause.

Influence du diamètre. — Pour déterminer l'influence du diamètre sur le tirage, M. Morin a fait quatre séries d'expériences sur des terrains de natures différentes. La première (page 15) a lieu sur un empierrement avec un affût de siége monté tour à tour sur des roues de $1^m.10$, $1^m.56$ et $2^m.05$.

Le diamètre $1^m.10$ donne, sur une longueur de $300^m.00$ de la route, les tirages suivants :

kil.	kil.	kil.
90.18	100.50	91.24
96.59	103.45	91.40
78.42		

A quoi tiennent les différences considérables qu'on remarque entre ces chiffres? elles vont jusqu'à 28 pour 100. Est-ce à l'inexactitude de l'instrument? est-ce à la différence du terrain? ou, comme nous le pensons, à ces deux causes à la fois? C'est ce que M. Morin n'a pas expliqué,

et ce qui cependant méritait de l'être pour donner immédiatement la mesure de la confiance qu'on devait avoir dans les résultats obtenus par son procédé d'expérimentation. En prenant la moyenne entre tous ces chiffres et son rapport avec la pression, on obtient 0.0241 pour coefficient du tirage. En faisant la même opération pour les autres diamètres, on obtient les résultats suivants :

Diamètres.	Coefficients du tirage.
$1^m.10$	0.0241
$1^m.56$	0.0146
$2^m.05$	0.0135

A l'inspection de ces chiffres, on ne voit pas pourquoi M. Morin en a conclu que le tirage était en raison inverse du diamètre, car s'il en eût été ainsi, en passant du diamètre $1^m.10$ à $1^m.56$, le coefficient aurait dû descendre de 241 à 170. Or, il est descendu à 146. Du diamètre $1^m.56$ à $2^m.05$, il aurait dû descendre de 146 à 111. Or, il ne descend qu'à 135, c'est-à-dire que le diamètre $1^m.56$ et le diamètre $2^m.05$ donnent le même tirage à peu près. Puisque M. Morin avait à sa disposition des instruments exacts et précis, il devait conclure : que du diamètre $1^m.10$ au diamètre $1^m.56$ le tirage diminuait dans un plus grand rapport que celui des diamètres, mais qu'au delà de cette limite la diminution devenait insensible. C'était la seule conclusion que lui permettaient ses expériences. Au lieu de cela, M. Morin a cherché à vérifier la loi de Coulomb qu'il s'était posée d'avance. Comme on l'a vu, en multipliant les nombres ci-dessus trouvés par les rayons correspondants, ils doivent devenir égaux si cette loi est exacte. Voici ce que donne cette opération.

Diamètres.	Coefficients qui doivent être égaux avec la loi de la première puissance.
$1^m.10$	0.0132
$1^m.56$	0.0114
$2^m.05$	0.0139

(on trouvera dans le mémoire de M. Morin les nombres 134, 114, 132. Cela tient à des erreurs de calcul dans les

expériences 6, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, et dans la première et dans la troisième moyennes).

Pour admettre la loi de Coulomb et de M. Morin, il faut regarder 132, 114, 139, comme des nombres égaux. Ainsi, après avoir pris des moyennes entre des nombres qui devraient être égaux et qui diffèrent entre eux de 28 pour 100, ces moyennes diffèrent encore entre elles de 20 pour 100. Je ne vois, certes, pas là un degré d'exactitude supérieur à celui du simple dynamomètre, et ne puis partager la confiance des commissaires de l'Académie dans les résultats de M. Morin (*). Mais en admettant même l'exactitude de ces chiffres, il y a des objections si graves à faire au système d'expérimentation qui les a fournis qu'ils n'en devraient pas moins être rejetés.

Les voitures soumises aux expériences sont des voitures à quatre roues, et on suppose que pour ces voitures le tirage ne dépend pas de la répartition de la charge. Nos expériences à ce sujet, bien incomplètes il est vrai, sembleraient prouver que les roues de derrière d'une voiture à quatre roues ont un coefficient de tirage moindre que les roues de devant, c'est ce qui s'explique facilement parce qu'elles profitent du frayé ouvert par les premières. Il y a plus, c'est que les expériences de M. Morin, celles du camion que nous allons examiner tout à l'heure, tendraient aussi à le prouver; car elles font voir que plus la charge porte sur l'arrière-train, plus le tirage diminue. S'il en était ainsi, on voit que les expériences de M. Morin ne pourraient être bien concluantes, car les divers diamètres n'ont pas été éprouvés avec les mêmes répartitions de charge.

Le tirage des voitures accusé par le dynamomètre n'est

(*) « En lisant son mémoire on y reconnaît cette manière exacte de procéder qu'on a déjà eu lieu de distinguer dans ses travaux précédents, et l'on acquiert une grande confiance dans les résultats de ses observations. » (*Rapport à l'Institut sur le mémoire de M. Morin.*)

pas seulement la résistance du terrain dont il est ici question, mais cette résistance augmentée du frottement à l'essieu. Pour obtenir la première, il faut donc déduire du résultat immédiat l'effort employé à vaincre ce frottement. Or, M. Morin n'a pas fait d'expériences spéciales pour connaître l'intensité de cette résistance; il s'est borné à emprunter à des expériences qu'il a faites sur les axes de rotation des machines, le coefficient de 0.05 qu'elles lui ont donné. Or, y a-t-il parité dans les circonstances? Les axes des machines fixes sont exactement cylindriques, tournent dans des paliers parfaitement dressés et sont disposés de manière à être toujours graissés. Peut-être, à la rigueur, ce chiffre pourrait-il convenir aux essieux de waggons placés à peu près dans les mêmes circonstances (*); mais l'essieu ordinaire d'une voiture est fixe; c'est lui qui fait tourner le moyeu dans lequel il est logé, ce qui fait remonter continuellement le graissage; le moyeu et l'essieu sont coniques et inclinés à l'horizon; la roue va frotter tantôt contre l'écrou qui termine l'essieu, tantôt contre la rondelle placée le long du corps de la voiture. Voilà bien des causes de résistances qui n'existent pas pour l'axe d'une machine fixe, d'un volant par exemple, et dont M. Morin n'a pas tenu compte. Nous avions adopté dans nos expériences le coefficient 0.12 et nous pensons que s'il est un peu fort pour les essieux de diligences, il est plutôt faible pour les voitures du genre des chariots d'artillerie. Enfin, on doit observer que M. Morin, entraîné sans doute par la dénomination ordinaire de frottement à l'essieu, a pris les dimensions de la fusée même de l'essieu (**), au lieu de prendre celles du moyeu, qui, dans le cas des voitures

(*) M. Virla a trouvé pour les essieux de divers waggons du chemin de fer de Cherbourg les coefficients suivants: 0.042, 0.055, 0.089, 0.108, 0.16, 0.209. (*Annales des ponts et chaussées*, 1835 1er semestre.)

(**) *Voir* page 8 du mémoire de M. Morin, où il appelle ρ' et ρ'' les rayons moyens des fusées des essieux de devant et de derrière.

ordinaires, mesurent réellement l'espace parcouru par cette résistance; or, dans les grosses voitures le moyeu a toujours, au moins, $0^{m}.01$ de jeu à l'essieu. En faisant ces diverses corrections dans les résultats de M. Morin, voici les coefficients auxquels on arrive dans les deux hypothèses de la loi de Coulomb ou de celle de la racine quarrée :

DIAMÈTRES.	COEFFICIENTS QUI DOIVENT ÊTRE ÉGAUX.	
	Loi de Coulomb.	Loi de la $\sqrt{}$
mèt.		
1.10	0.0107	0.0144
1.56	0.0088	0.0100
2.05	0.0113	0.0112

Les chiffres de la dernière colonne sont à peu près aussi exacts que ceux de la seconde. L'erreur y est encore de 36 pour 100, il est vrai, mais une erreur de 36 pour 100 n'est pas pour M. Morin une raison de ne pas conclure (*voir* pages 30 et 31, expériences 83-97, des coefficients qui varient entre eux de 50 pour 100 et que M. Morin n'hésite pas à considérer comme égaux entre eux). Quant à nous, nous dirons : des erreurs de 36 et de 25 pour 100 ne prouvent ni la loi de Coulomb, ni la loi de la racine quarrée : elles ne prouvent que l'inexactitude des expériences qui fournissent de pareils écarts, et cette inexactitude, il nous sera facile de l'expliquer par une circonstance qui a échappé à l'attention de MM. les commissaires, car elle n'eût pas manqué de leur faire rejeter tous ces résultats sans autre examen ultérieur.

En effet, en jetant un coup d'œil sur la colonne des espaces parcourus et sur celle des pentes, on reconnaît bien vite que les trois diamètres dont on vient de comparer ici les tirages n'ont pas roulé sur le même terrain. Ainsi, les roues de $1^{m}.10$ n'ont parcouru que $300^{m}.00$ de lon-

gueur; celles de 1^{m}.56, 1 895^{m}.00, et dans ces 1 895^{m}.00 les 300^{m}.00 parcourus par les premières ne sont pas même compris; enfin, les roues de 2^{m}.05 ont parcouru 3 305^{m}.00, dans lesquels ne sont compris ni les 300^{m}.00 des premières roues, ni les 1 895^{m}.00 des secondes. Or, qu'y a-t-il d'étonnant à ce que des expériences ainsi faites ne donnent pas des résultats précis? la route soumise aux expériences n'était pas homogène, car les mêmes diamètres donnent des tirages qui varient entre eux de 28 pour 100 (*voir* les expériences 3 et 5), et les diamètres différents donnent des tirages égaux (*voir* les expériences 12 et 14). Pour arriver à des résultats exacts ou du moins comparables, c'était une condition indispensable que de prendre le même terrain pour les diamètres à comparer. En changeant ainsi de terrain à chaque diamètre, on obtient des tirages différents, mais on ne sait pas si cette différence doit être attribuée au diamètre ou au terrain. Les résultats de semblables expériences ne peuvent donc fournir aucun renseignement utile. Cependant la loi des diamètres est tellement saillante qu'elle serait sortie de ces expériences même, si elles avaient été plus nombreuses et surtout si les diamètres comparés avaient varié dans un plus grand rapport. Mais celui qui avait été choisi, à peine de 1 à 2, ne mettait pas entre les deux lois une différence telle que la vérité pût se faire jour à travers toutes les causes d'erreur qui se trouvaient accumulées dans le système d'expérimentation.

Les objections que nous venons de présenter contre cette expérience se reproduisent avec plus de force encore contre la suivante faite avec les mêmes diamètres, sur un rechargement de gravier de 0^{m}.04 à 0^{m}.05. Il n'est personne qui ne sache que sur une pareille surface, le tirage est excessivement variable, non-seulement d'un point à un autre, mais d'un moment à l'autre; car il suffit qu'une seule voiture ait passé pour que celle qui la suit dans la même

piste éprouve un tirage beaucoup moindre. Or, ici, non-seulement M. Morin n'a pas expérimenté les divers diamètres sur le même emplacement, mais l'intervalle entre ces expériences a été assez considérable pour que la couche de cailloux fût plus ou moins épaisse sous les roues (*voir* la colonne d'observations). Enfin, les diverses épreuves n'ont pas été faites avec la même vitesse, et quoique M. Morin admette que sur un rechargement de gravier la vitesse n'a aucune influence sur le tirage, ce résultat paraîtra assez extraordinaire pour être révoqué en doute jusqu'à ce qu'il soit mieux établi. Ces rechargements de cailloux si mobiles sont d'ailleurs des surfaces tout à fait exceptionnelles qui ne présentent aucune analogie avec les surfaces unies et homogènes des empierrements, et qui pourraient avoir des propriétés tout à fait distinctes et même variables suivant les formes, les dimensions et le mélange des cailloux dont elles sont composées. On ne pourrait donc rien conclure d'expériences qui seraient rigoureusement faites pour d'autres surfaces. Or, pour opérer rigoureusement, il aurait fallu employer des voitures à deux roues, car ici on ne saurait contester la différence de tirage qui doit exister entre l'avant-train et l'arrière-train; il aurait fallu que le poids de ces voitures fût le même car il est très-possible que le tirage ne soit pas proportionnel à la pression; il aurait fallu employer des diamètres très-différents et les faire rouler non-seulement sur le même terrain, mais avoir soin à chaque passage de rétablir le sol dans le même état, en effaçant les frayés; enfin, il aurait fallu que la vitesse fût toujours la même. Or, aucune de ces précautions n'a été prise! Quelle conclusion sera-t-il donc permis de tirer de ces résultats?

Passons aux expériences faites avec un camion à roues inégales sur un gazon humide. M. Morin fait varier la charge entre les trains et compare les tirages d'après les diamètres; les roues ont $0^m.81$ et $1^m.25$ de hauteur. On

conçoit qu'avec d'aussi petites différences ou plutôt un rapport si près de l'unité, il faille avoir un système d'expérimentation bien précis pour que les résultats présentent quelque garantie de certitude. Ceux que donne M. Morin sont résumés par les trois chiffres suivants qui devraient être égaux si la loi inverse du diamètre était exacte, 0.0249, 0.0234, 0.0280. Il y aurait ici une erreur à corriger en faveur de la loi de M. Morin ; le chiffre 0.0234 doit être remplacé par 0.0243, et l'écart du plus grand au plus petit coefficient serait un peu diminué. Mais malheureusement dans les neuf expériences que résument ces trois moyennes, il y a neuf erreurs de calcul assez considérables. M. Morin a pris pour chiffres de la pression sur le terrain celui de la pression sur les essieux, de sorte que le poids des roues se trouve complétement omis. En rectifiant ces erreurs, voici ce qu'on trouve :

COEFFICIENTS erronés donnés par M. Morin.	COEFFICIENTS rectifiés.	COEFFICIENTS dans l'hypothèse de la loi de la V
0.0249	0.0222	0.0312
0.0234 pour 243	0.0216	0.0300
0.0280	0.0256	0.0382

Ainsi, erreur de 17 pour 100 dans la loi de M. Morin, erreur de 24 pour 100 dans la loi de la racine quarrée !... et qu'on remarque que nous n'avons corrigé ni le coefficient du frottement à l'essieu, ni l'effet de l'inclinaison du tirage qui, dans ces expériences, diminue la charge des essieux de l'avant-train, et enfin qu'il s'agit de diamètres très-peu différents, d'un gazon humide où le frayé devrait être assez prononcé pour que le tirage de l'arrière-train fût sensiblement plus faible que celui de l'avant-train. En effet, si on met ces coefficients en regard de la répartition des pressions, on trouve :

PRESSIONS.		COEFFICIENTS qui doivent être égaux.	
Avant-train.	Arrière-train.	Loi de la première puissance.	Loi de la $\sqrt{\ }$
kil.	kil.		
2 439	934	0.0256	0.0382
1 417	1 956	0.0222	0 e312
1 195	2 178	0.0216	0.0300

Ces chiffres ne semblent-ils pas prouver, au contraire, que plus la charge porte sur les roues de derrière, plus le tirage est faible, puisque pour une même charge totale on fait descendre le coefficient de 256 à 212 ou de 382 à 300. Or, s'il en est ainsi, les voitures à quatre roues ne peuvent pas servir à des expériences sur le tirage tant qu'on ne connaîtra pas la loi de diminution de tirage de l'avant à l'arrière-train, diminution indépendante de celle du diamètre, puisque les chiffres ci-dessus ont déjà subi la correction due à cette circonstance.

Ainsi, en corrigeant les neuf erreurs de calcul de ces neuf expériences, les coefficients viennent tomber entre les deux lois, et il suffirait de la moindre correction sur le frottement à l'essieu pour les porter du côté de la loi de la racine quarrée, et lorsqu'on en discute les résultats, on voit qu'ils tendent à prouver l'inexactitude du système d'expérimentation dont ils sont tirés.

Nous arrivons maintenant aux dernières séries d'expériences faites sur le pavé de Paris avec un chariot suspendu des messageries. Ici, la nature de la chaussée est dure, et par conséquent le nombre des trains ne peut guère influer sur le tirage; elle est aussi homogène, et d'ailleurs les divers diamètres ont été éprouvés sur le même emplacement; les essieux mieux assemblés et mieux ajustés doivent donner un frottement qui s'approche davantage de l'intensité que lui a attribuée M. Morin. Les résultats

obtenus, 0.0117 et 0.0115, sont d'une concordance presque parfaite; ces expériences sembleraient donc devoir échapper à toutes les observations que nous venons de faire. Malheureusement ces quatre expériences contiennent encore quatre erreurs de calcul qui en altèrent complétement les résultats. Dans les deux premières, 41 et 42, l'erreur est légère, elle n'est que de $143^k.9$ sur la pression totale. Mais comme l'expérience a lieu sur une forte pente, il s'ensuit que l'effort employé à vaincre la gravité doit être augmenté de $144 \times 0.01856 = 2^k.67$, et par conséquent le tirage diminué d'autant. Dans les deux expériences suivantes, l'erreur est beaucoup plus considérable. Le produit $3355^k.9$ par 0.1856 n'est que $62^k.28$ au lieu de $69^k.23$, de sorte qu'en rectifiant les chiffres on arrive aux coefficients suivants :

	COEFFICIENTS erronés donnés par M. Morin.	COEFFICIENTS rectifiés.	COEFFICIENTS dans la loi de la $\sqrt{V}$
Petits diamètres. .	0.0117	0.0114	0.0153
Grands diamètres. .	0.0115	0.0129	0.0149

Voilà donc la loi de la racine quarrée démontrée par les expériences mêmes de M. Morin. Nous venons d'examiner en détail toutes celles qu'il a faites sur cette propriété du diamètre. On voit qu'elles se composent : 1° d'une expérience sur un empierrement dont les résultats très-discordants entre eux ne peuvent être admis parce que les divers diamètres n'ont pas roulé sur le même terrain; 2° d'une expérience sur un rechargement de cailloux à laquelle on peut faire la même objection, et de plus de ne pouvoir être applicable à d'autres circonstances; 3° d'une expérience faite sur un pré dont les résultats une fois corrigés des erreurs de calcul qu'ils contiennent laissent la question indécise; 4° d'une expérience sur le pavé de

Paris qui, après une rectification semblable, vient confirmer la loi de la racine quarrée.

Avant de passer à l'examen des expériences sur les autres propriétés des roues, qu'il me soit permis de faire une observation sur les nombreuses erreurs de calcul que je viens de signaler. Nous venons de parcourir quarante-quatre expériences seulement, et voilà déjà vingt et un résultats erronés. Ces quarante-quatre expériences se trouvent résumées par onze chiffres moyens. En retranchant les trois chiffres qui appartiennent au rechargement de gravier, surface tout à fait exceptionnelle, il ne reste pour conclure que huit chiffres. Eh bien, sur ces chiffres, il n'y en a qu'un d'exact, les sept autres sont faux, et ici nous ne parlons pas d'erreurs de principe ou de théorie; sous ce rapport, tous les chiffres de M. Morin sont faux pour nous; nous parlons d'erreurs de calcul, d'addition, de soustraction, etc., sur lesquelles il n'y a pas de discussion possible. Cette circonstance expliquera peut-être jusqu'à un certain point la manière dont le travail de M. Morin a été apprécié par l'Académie. Pour découvrir toutes ces erreurs matérielles il fallait un temps et une patience qu'on ne pouvait demander à des personnes occupées par tant de travaux divers. M. Morin, depuis longtemps connu à l'Académie, présentait des chiffres; on devait les supposer exacts. Mais en doit-il être de même aujourd'hui? Ces erreurs si nombreuses ne jettent-elles pas des doutes sur tous les autres résultats? car on doit observer que les appareils dynamométriques de M. Morin ne donnent pas immédiatement le tirage, comme une balance donne le poids d'un corps. Elles ne donnent qu'une longue bande de papier sur laquelle est tracée une courbe à ondulations irrégulières dont il faut déduire l'ordonnée moyenne. Or, pour cela, il faut faire une addition de plusieurs centaines de nombres de trois chiffres (on sait que de toutes les opérations la plus sujette

à erreur est l'addition), puis, pour avoir la pente du terrain sur lequel on opère afin de déduire l'effort dû à la gravité, il faut avoir deux cotes de nivellement, faire une soustraction et une division et affecter le résultat d'un signe, positif si on monte, négatif, si on descend. Toutes ces opérations sont sujettes à erreur; mais comme M. Morin n'en donne que les résultats, il n'y a pas de vérification possible. Or, nous le demandons, lorsque, dans les opérations les plus simples, celles qui résultent des chiffres produits dans les tableaux, on découvre tant d'erreurs, n'est-il pas bien probable qu'il doit s'en être glissé quelques-unes dans les opérations préliminaires plus nombreuses et plus compliquées?

Influence de la pression. — M. Morin n'a pas fait d'expériences spéciales pour démontrer que le tirage est proportionnel à la pression; il croit pouvoir tirer cette conclusion des expériences sur le camion que nous venons d'examiner, expériences dans lesquelles la pression sur chaque train a varié, quoique les diamètres restassent les mêmes. Nous pourrions faire observer que, dans ces expériences, il n'y a que la répartition de la charge sur les trains qui varie, que la charge totale restant constante les résultats ne peuvent être que fort peu concluants, que ces résultats supposent que l'influence du diamètre est mesurée par la première puissance, que par conséquent si on les évaluait dans l'hypothèse de la loi de la racine quarrée, on arriverait à une conclusion contraire; mais on doit se rappeler que ces neuf expériences du camion contiennent neuf erreurs de calcul assez considérables. Les conclusions de M. Morin reposant sur des chiffres erronés, toute discussion de principe devient inutile; c'est aux règles de l'arithmétique à en faire justice. Nous ne pourrions donc que recommencer les calculs que nous avons faits plus haut.

Cependant nous ne pouvons nous empêcher de faire

observer que, pour une loi aussi importante que celle de l'influence de la pression, il y avait de la part de M. Morin une certaine hardiesse à expérimenter sur une seule surface et sur une surface aussi exceptionnelle que du gazon humide, puis à en étendre les résultats à toutes les surfaces comme le pavé, les empierrements, les rechargements de cailloux, les sables, etc., etc.

Quoi qu'il en soit, nous ne contestons pas le principe, nous disons seulement qu'il ne résulte pas des expériences de M. Morin.

Influence de la largeur de la jante. — Les expériences sur l'influence de la largeur de la jante ont été faites avec un appareil particulier. Un arbre en fonte était disposé de manière à tourner sur des disques concentriques qui lui étaient adaptés. En mettant plusieurs de ces disques, qui avaient 0.045 d'épaisseur, à côté les uns des autres, on avait des jantes de 0.045, de 0.09, de 0.135, etc., de largeur. Ainsi cet appareil permettait de varier cette dimension à volonté; mais il présentait, à notre avis, un inconvénient très-grave pour la propriété qu'on voulait étudier; c'est que le poids de l'appareil variait avec la largeur de la jante, et qu'il était impossible de faire dans les résultats la part de l'influence de l'augmentation de pression et celle de l'augmentation de largeur de jante. Car il faut bien remarquer que dès que la largeur de la jante a une influence sur le tirage, celui-ci ne peut plus être proportionnel à la pression. Nous en avons donné plusieurs démonstrations dans la première partie de ce mémoire, et cela se voit du reste à priori, puisque si la largeur de la bande diminue le tirage, ce ne peut être que parce qu'elle diminue la pression relative. En effet, supposons que l'appareil monté tour à tour avec un disque et avec deux disques donne les résultats suivants (expériences de 1 à 7 de M. Morin, page 24):

LARGEURS DE JANTE.	PRESSIONS.	TIRAGES.	COEFFICIENTS.
mèt.			
0.045	1.045	253	0.0242
0.090	1.335	267	0.0200

il sera tout à fait inexact d'en conclure que l'augmentation de la largeur de la jante a diminué le tirage de 24 à 20, et que le tirage est resté proportionnel aux pressions. En effet, dans la seconde expérience, on peut diviser en deux parties égales la pression sur les deux disques de $0^{m}.045$ qui seront alors chargés chacun de $667^{k}.5$. Or, d'après la première expérience, le tirage de ces deux disques de 0.045 de largeur devrait être

$$0.0242 \times 667.5 + 0.0242 \times 667.5 = 323 \text{ kilog.}$$

tandis qu'il n'est d'après la seconde que de 267 kilog. Il y a là une contradiction évidente entre les deux principes. Pour les concilier, il faut absolument admettre que le tirage ne reste pas proportionnel à la pression quand la largeur de la bande le diminue. Or, dans toutes ses expériences sur la largeur des jantes, M. Morin ayant simultanément admis ces deux principes, les résultats et les formules qu'il en a tirés sont nécessairement erronés. Nous nous croyons donc dispensé d'en faire un examen détaillé. Au reste, cet examen serait sans intérêt puisque M. Morin n'attribue à la bande d'influence sensible que sur les sables et les terrains mous, et qu'il est d'accord avec nous pour les empierrements. Nous dirons même qu'il l'est aussi pour le pavé; car, quoiqu'il annonce dans le texte que, sur cette surface, la largeur de la bande n'a pas d'influence sur les empierrements, on trouve un résultat tout opposé quand on remonte aux expériences (*voir* pages 30 et 31). On y lit, en effet, les chiffres suivants :

Largeurs de bande.	Tirages.
$0^{m}.09$	0.095
$0^{m}.135$	0.100
$0^{m}.26$	0.082

Ce n'est pas tout, dans les expériences sur la bande 0,135, M. Morin prévient avec raison que l'excès de tirage de deux expériences élémentaires tient à la différence de vitesse ; en retranchant ces expériences et en faisant la même correction sur celles de la bande de 0.26, où se trouve évidemment un coefficient erroné, on arrive à cette conclusion :

Largeurs de bande.	Tirages.
0.090	0.095
0.135	0.094
0.260	0.071

c'est-à-dire que sur le pavé la largeur de la bande a une influence très-prononcée, précisément le contraire de ce qu'annonce M. Morin. (J'ai expliqué dans mon Essai comment une large bande faisait disparaître les inégalités du pavé par rapport au mouvement du centre de gravité, et comment cette propriété se conciliait avec la proportionnalité de la pression.)

Sans remonter aux considérations théoriques données plus haut, qui font voir que lorsque $\frac{T}{P}$ est constant, la quantité δ est invariable, quelle que soit la répartition de la charge, qu'il me soit permis de faire observer que si, sur les surfaces unies, le frottement n'était pas indépendant de la largeur du contact, il serait impossible d'en étudier les propriétés. Il s'en faut bien, en effet, que le contact apparent soit égal au contact réel ; c'est ce qu'on reconnaît en plaçant entre son œil et le jour un cylindre bien dressé le long d'une règle. On voit alors qu'il n'y a que sur certains points de la longueur du contact que la lumière est interceptée et que, par conséquent, il y a contact réel. Ainsi, un cylindre de 0.05 a souvent autant de longueur de contact qu'un cylindre de 0 10. On peut bien, il est vrai, au moyen d'une forte pression, avoir un contact de toute la longueur de l'arête du cylindre, mais alors on aura évidemment des pressions différentes

dans toutes les sections et qui changeront d'intensité au fur et à mesure que le cylindre roulera, parce que les inégalités de ses arêtes et du plan se trouveront dans un autre ordre. Or, si on admet que le tirage soit toujours proportionnel à la pression, le tirage total ne changera pas, puisqu'il sera toujours la somme de

$$\theta p_1 + \theta p_2 + \theta p_3 \ldots = \theta (p_1 + p_2 + p_3 \ldots)$$

et qu'on a toujours

$$p_1 + p_2 \ldots = P$$

Sans cette propriété, non-seulement les cylindres de longueurs différentes donneraient des tirages différents, mais même ceux de longueur égale, parce que la répartition de la charge ne s'y ferait pas de la même manière et varierait même avec cette charge. Ainsi, le tirage varierait à chaque instant et échapperait à toute espèce de calcul.

Ces considérations s'appliquent encore mieux aux voitures et aux routes. Lorsque ces dernières sont bonnes, le contact est bien loin d'avoir la largeur de la bande à cause de sa forme arrondie et des légères aspérités de la route; et je ne vois pas comment on pourrait évaluer la largeur du contact réel, le seul qui puisse avoir une influence sur les résultats.

Influence de la vitesse. — Je n'entrerai pas non plus dans l'examen détaillé des expériences faites par M. Morin sur l'influence de la vitesse. J'ai surabondamment démontré que son système d'expérimentation l'a conduit à de nombreuses erreurs sur des propriétés saillantes; comment espérer de saisir, avec ce système, de légères influences? et puis, qu'on remarque que les chiffres de M. Morin sont tous affectés de l'erreur commise sur la loi des diamètres : voilà donc une première correction à faire. Il faut en faire souvent une seconde pour la largeur de la bande; mais avant tout d'abord il faut corriger les

erreurs de calcul suivant les règles de l'arithmétique, et malheureusement ces erreurs sont assez nombreuses. Ainsi, les trente expériences faites par M. Morin sur le pavé de Paris (pag. 54 et 55) renferment toutes des erreurs plus ou moins considérables. Si nous y ajoutions encore une correction pour le coefficient du frottement à l'essieu, on voit que nous arriverions à des résultats qui ne présenteraient plus aucune espèce de rapport avec ceux de M. Morin.

Quant à l'influence de l'inclinaison de la ligne de tirage sur l'intensité de cette résistance, c'est une propriété qui dérive immédiatement du parallélogramme des forces et qui, par conséquent, échappe à toute discussion.

Observations sur les chiffres du tirage donnés par M. Morin. — M. Morin a résumé ses expériences dans un tableau général qui donne sur les diverses espèces de chaussée les chiffres du tirage de plusieurs voitures en usage. Ces chiffres ont la plus haute importance pratique, puisqu'ils sont destinés à faire connaître le rang que doivent occuper les routes dans les divers moyens de transport et les voitures les plus avantageuses à y employer. Or, de ces chiffres et de tous ceux que nous venons d'examiner, il ressort une conséquence toute nouvelle et de la plus haute importance : c'est que jusqu'aux expériences de M. Morin on s'était complétement trompé sur l'intensité du tirage des routes. Jusqu'à présent les évaluations n'étaient jamais descendues au-dessous de $\frac{1}{50}$, c'est-à-dire de 20 kilogrammes par tonne; il fallait, pour arriver à un pareil résultat, les meilleures routes et les plus grandes roues. Nous n'avons jamais trouvé dans nos expériences au-dessous de 23 et de 22 kilogrammes. Eh bien! M. Morin, sur une route un peu caillouteuse, pour un chariot ayant des roues de $1^{m}.56$, trouve moins de $\frac{1}{73}$, moins de 14 kilogrammes! Si cette expérience avec laquelle les autres expériences de M. Morin sont d'accord est exacte,

on peut en tirer des conséquences aussi extraordinaires qu'importantes :

1° Comme le travail journalier qu'on peut demander à un cheval, déterminé par des expériences de manége dans lesquelles on a fait soulever des poids, est reconnu être de 30 à 45 kilogrammes, il s'ensuit que le roulage, qui met ordinairement un cheval par tonne, pourrait facilement en supprimer la moitié, nous pourrions même dire les deux tiers, car ce tirage de 14 kilogrammes pour des roues de 1m.56 de diamètre moyen, se réduit à 10 kilogrammes pour des roues de 2m.00, suivant la loi de M. Morin; il va sans dire qu'on suppose les pentes des routes corrigées en conséquence.

2° Puisque le roulage peut n'avoir qu'un tirage de 10 kilogrammes par tonne sur les routes en empierrement, il s'ensuit que les chemins de fer sur lesquels le tirage est encore de 5 kilogrammes réduisent à peine les frais de traction de moitié au lieu de $\frac{5}{6}$, comme on l'avait cru jusqu'à présent. Rien même ne serait si facile que d'avoir sur les routes ordinaires à peu près le même tirage que sur les chemins de fer. Il suffirait d'exécuter la chaussée en pavés de Metz sur lequel le tirage n'est, suivant M. Morin, pour des roues de 1m.56, que de $\frac{1}{87}$; sur cette surface, des roues de trinqueballe résoudraient ce problème.

Je n'ai pas besoin d'insister sur l'importance et l'opportunité de la solution de toutes ces questions. Il s'agit, en effet, de l'avenir des chemins de fer. Si les chiffres de M. Morin sont exacts, jamais ces nouvelles voies ne pourront soutenir la concurrence des routes ordinaires; jamais l'économie dans les frais de traction ne pourra couvrir les dépenses de frais de construction. Dans un moment où tant d'entreprises de cette nature vont commencer, la solution de cette question d'intensité de tirage est donc de la plus haute importance, et nous ne concevrions pas qu'on pût se dispenser de la résoudre. Nous ne nous dissimu-

lons pas non plus sa gravité par rapport aux travaux de M. Morin; jusqu'ici nous n'avons attaqué que les conséquences qu'il a tirées des résultats de ses expériences, en les rectifiant quelquefois lorsque nous y avons trouvé des erreurs, mais nous sommes toujours parti des données immédiates de ses expériences.

Maintenant nous dirons que ces données mêmes ne sont pas exactes, que les dynamomètres de M. Morin donnent $\frac{1}{72}$ quand il faudrait avoir $\frac{1}{50}$ et même $\frac{1}{56}$. Qu'on parcoure, en effet, les colonnes de ses tableaux, et on trouvera partout des résultats aussi inexplicables sous le rapport de l'intensité; cependant la vérification est bien facile: si le tirage n'est que de $\frac{1}{72}$ pour un chariot d'artillerie avec des roues de $1^{m}.56$, qu'on le place sur une pente de $0^{m}.014$ et qu'on voie si la pente suffit pour le faire descendre une fois lancé; que si cette pente ne suffit pas, qu'on répète l'expérience sur des pentes plus fortes, et on sera bien vite convaincu qu'il n'y a pas de voitures et pas de route en empierrement sur lesquelles on puisse obtenir un mouvement spontané, à moins d'une pente de 0.02, c'est-à-dire du cinquantième. Aux expériences de M. Morin nous pouvons opposer toutes celles qui sont contenues dans notre Essai, enfin, celles que nous avons faites depuis avec les plans inclinés, et que nous avons citées au commencement de ce mémoire. Sur une partie de route parfaite nous avons obtenu pour coefficient du frottement à la bande

Roues de	$1^{m}.55$	1/57	0.0173
	$1^{m}.82$	1/64	0.0157

Qu'on ajoute maintenant le frottement à l'essieu, en ne prenant pour coefficient que 0.05 et 0.10 pour rapport des diamètres, on aura à ajouter aux nombres ci-dessus 0.005, et ils deviendront 0.0223 et 0.0207, c'est-à-dire plus du cinquantième. Or, ces expériences de plan incliné nous paraissent inattaquables sous le rapport de l'exactitude, et on voit qu'elles viennent confirmer celles du

simple dynamomètre dont nous nous étions servi d'abord. Nous disons donc que tous les tirages attribués par M. Morin aux routes sont trop faibles, et que l'erreur à cet égard est souvent de 50 pour 100 ; il nous semble que, dans l'intérêt de l'avenir des chemins de fer, cette question devrait être éclaircie et décidée.

L'examen que nous venons de faire du travail de M. Morin nous semble démontrer qu'il n'est pas de nature à infirmer nos résultats que nous résumerons ainsi :

Résumé.

Sur les routes en empierrement et sur les surfaces unies en général :

Le tirage est proportionnel à la pression,
indépendant de la largeur de la bande,
en raison inverse de la racine quarrée du diamètre,
indépendant de la vitesse.

Les règles de la statique démontrent que le frottement de roulement n'est que la réaction verticale des molécules comprimées au contact, qui, à l'état de repos, passe par le rayon vertical ; et dans le mouvement, en avant d'une certaine quantité δ, d'où dépend l'énergie de cette résistance.

En analysant le phénomène de cette réaction, on arrive à conclure que, quelles que soient les forces qui relient entre elles les molécules des corps et les rappellent à la position dont on les écarte, on a toujours pour un cylindre qui roule sur un plan entre le tirage, la longueur du cylindre, son poids et son rayon, la relation

$$T = LF\left(\frac{P}{L\sqrt{2R}}\right)$$

relation à laquelle satisfont les propriétés déduites de nos

expériences dont l'une suffit pour déterminer la fonction F, de manière qu'elle se réduit à

$$T = \rho \frac{P}{\sqrt{2R}}$$

la constante ρ qui ne varie qu'avec les surfaces exprime elle-même une relation entre la compressibilité de la surface et son élasticité. Lorsqu'on connaît l'enfoncement instantané ε' qui a lieu sous l'influence d'une pression, et l'empreinte ε qu'elle laisse sur la surface après son passage, on déduit ρ de l'équation

$$\rho = \tfrac{3}{8} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon'}}$$

Il existe donc entre le frottement de roulement, la compressibilité et l'élasticité d'une surface, des relations directes qui permettent de les déduire les unes des autres. Ainsi on a avec l'équation ci-dessus :

$$\varepsilon = \gamma \sqrt[3]{T} \qquad \varepsilon' = \gamma' \sqrt[3]{T^2}$$

Il suit de là que deux coefficients suffisent pour déterminer une surface par rapport à ses propriétés de roulement avec toutes les autres, et que si on avait pour toutes les surfaces ces deux coefficients, on pourrait par le calcul déterminer le frottement qui résulterait de leur combinaison deux à deux. On peut, au reste, obtenir ces coefficients en faisant rouler chaque surface sur elle-même, ensuite sur une autre prise pour terme de comparaison.

Lorsqu'on considère deux surfaces courbes roulant l'une sur l'autre, la réaction qui a lieu au point de contact passe à une distance de la normale commune, exprimée par

$$\delta = \tfrac{1}{4} \rho \sqrt{\frac{RR_1}{R_1 \pm R}}$$

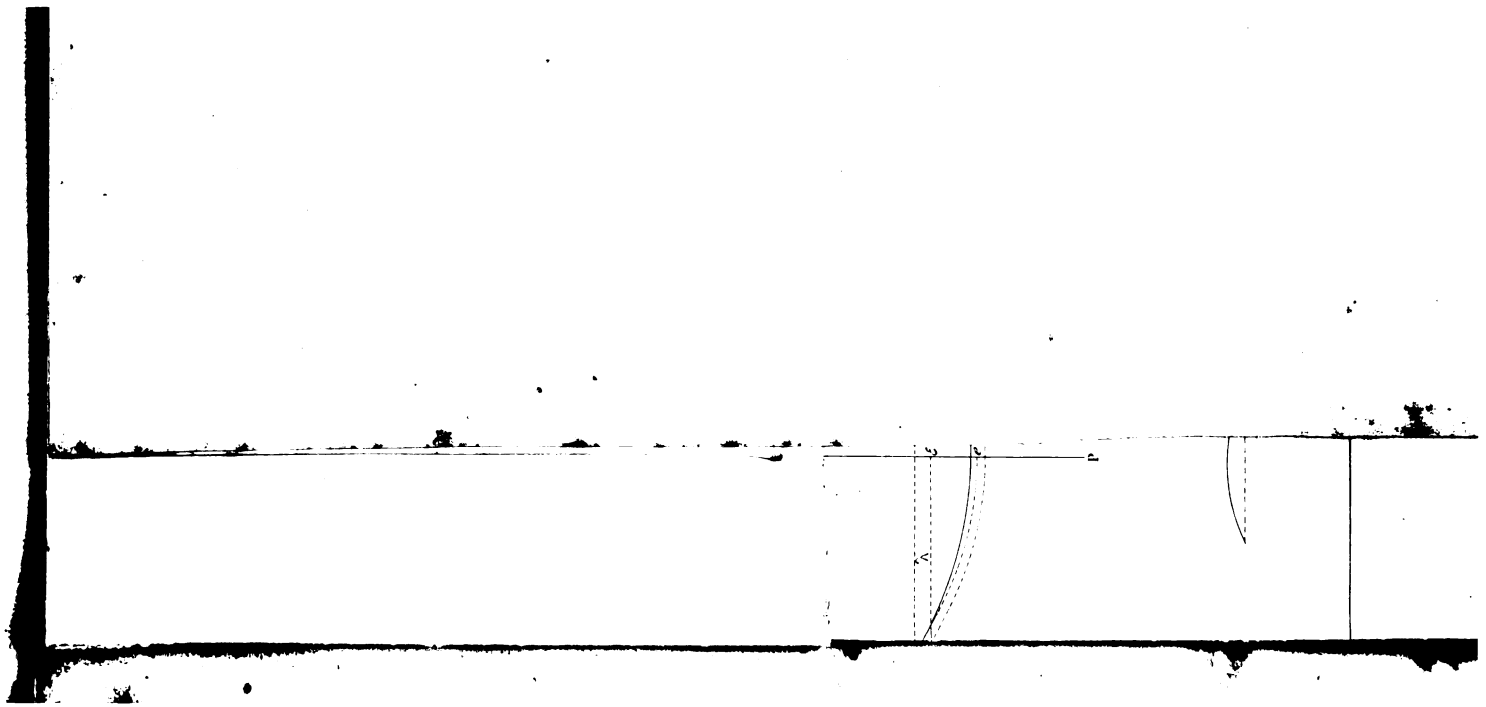
en appelant R et R_1 les rayons de courbure des sections faites dans la direction de la vitesse.

Cette force étant connue d'intensité ; de direction et de position, on peut résoudre tous les problèmes que peut présenter le calcul du frottement de roulement, par les règles ordinaires de la mécanique.

P. S. Depuis que ce mémoire a été adressé à la commission des Annales des ponts et chaussées (juin 1841), M. Morin a publié *une seconde édition revue et considérablement augmentée de ses expériences sur le tirage des voitures et sur les effets destructeurs qu'elles exercent sur les routes*. Nous aurons l'occasion de nous occuper de cette publication en traitant la question de la police du roulage; en attendant, nous n'y avons rien vu qui fût de nature à modifier le contenu de ce mémoire.

(Septembre 1842.)

PARIS. — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
IMPRIMEURS DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE,
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.



On trouve chez les mêmes Libraires :

DUPUIT, *ingénieur en chef au corps royal des ponts et chaussées.* **ESSAI ET EXPÉRIENCES SUR LE TIRAGE DES VOITURES ET SUR LE FROTTEMENT DE SECONDE ESPÈCE**, in-8. 1837. 3 fr. 50 c.

— **CONSIDÉRATIONS SUR LES FRAIS D'ENTRETIEN DES ROUTES.** in-8. 1842. 2 fr. 50 c.

BINEAU, *ingénieur en chef au corps royal des Mines.* **CHEMINS DE FER D'ANGLETERRE.** Leur état actuel ; législation qui les régit ; conditions d'art de leur tracé ; leur mode et leurs frais d'établissement ; leur système et leurs frais d'exploitation ; leur circulation ; leurs tarifs et leurs produits. Application à la France des résultats de l'expérience de l'Angleterre et de la Belgique. 1 vol. in-8, avec carte color. 1840. 7 fr.

CAIMAN DUVERGER. DES VOITURES ET DES ROUTES, *leur entretien et leur exécution*, modifications que nécessitent la sûreté, l'économie et la célérité des communications, expériences sur la résistance, le chargement, les moteurs, etc., in-8, 1835. 3 fr.

CORDIER, *inspecteur divisionnaire des ponts et chaussées.* Essai sur la **CONSTRUCTION DES ROUTES** et des canaux, et la législation des travaux publics, 2 vol. in-8 de texte, et 1 vol. de pl. in-fol. 42 fr.

DUGUÉ (E.), *ingénieur des ponts et chaussées.* Du Système d'entretien des **CHAUSSÉES D'EMPIERREMENT**, mis en pratique depuis 1837 dans le département de la Sarthe, in-8, 1841. 1 fr. 50 c.

DUNOYER (Ch.), *conseiller d'État, membre de l'Institut.* **ESPRIT ET MÉTHODES COMPARÉES** de l'Angleterre et de la France, dans les entreprises des travaux publics et en particulier des chemins de fer, conséquences pratiques tirées pour notre pays de ce rapprochement, in-8, 1840. 2 fr.

FAVIER, *inspecteur divisionnaire des ponts et chaussées.* **ESSAI SUR LES LOIS DE MOUVEMENT DE TRACTION** et leur application au tracé des voies de communication. 1 vol. in-8. 1841. 6 fr. 50 c.

HAGEAU (Hippolyte), *ancien élève de l'École polyt., ex-officier d'artillerie.* **DE L'ÉTAT DES ROUTES** en France, et de la possibilité de le rendre florissant au moyen de faibles dépenses. in-8, 1829. 1 fr. 25 c.

LEMOYNE, *ingénieur en chef des ponts et chaussées.* Essai d'un traité sur l'entretien des **ROUTES EN EMPIERREMENT**, ouvrage présentant sur ce sujet un ensemble de considérations techniques, financières et administratives, 1 vol. in-8, 1830. 3 fr. 50 c.

NAVIER, *inspecteur divisionnaire des ponts et chaussées.* Considérations sur les principes de la **POLICE DU ROULAGE** et sur les travaux d'entretien des routes ; suivies d'un appendice contenant un extrait de diverses enquêtes parlementaires anglaises, ainsi que le nouveau traité des routes de sir Henry Parnell, et l'instruction officielle pour la direction des travaux de la route d'Holyhead, 1 vol. in-8, avec planches. 3 fr. 50 c.

POUSSIN (Guillaume-Tell), *ancien officier du génie aux États-Unis.* **CHEMINS DE FER AMÉRICAINS**, historique de leur construction. Prix de revient et de produit, mode d'administration adopté, résumé de la législation qui les régit, faisant suite aux travaux d'améliorations intérieures, etc., 1 vol. in-4, avec 8 planches et une carte. 13 fr.

SÉGUIN aîné, *ingénieur civil.* **DE L'INFLUENCE DES CHEMINS DE FER ET DE L'ART DE LES TRACER ET DE LES CONSTRUIRE**, ouvrage théorique et pratique, divisé en 8 chapitres, 1 fort vol in-8. Paris, 1839. 7 fr. 50 c.

WOOD (Nich.). **TRAITÉ** pratique **DES CHEMINS DE FER**, traduit de l'anglais sur la deuxième édition, avec des notes et additions par MM. F. de **MONTRICHER**, et E. de **FRANQUEVILLE**, *ingénieurs des ponts et chaussées*, et H. de **RUOLZ.** 1 vol. in-4, et atlas in-folio de 24 planches gravées par Adam. 15 fr.

PARIS. — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT, RUE RACINE, 28, PRÈS DE L'ODÉON.